ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко,
И. М. Тришин**

95 ЛЕТ

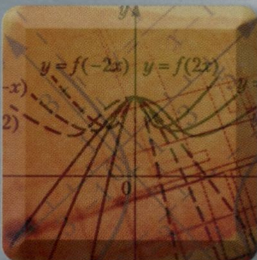
Математический анализ

Под редакцией **Н. Ш. Кремера**

углубленный курс

МО
рекомендует

**Учебник
Практикум**



БАКАЛАВР

ЮРАЙТ
издательство
biblio-online.ru

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

Под редакцией профессора **Н. Ш. Кремера**

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям

Рекомендовано УМО по образованию в области математических методов в экономике в качестве учебника для студентов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике» и другим экономическим специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва • Юрайт • 2014

УДК 51
ББК22.161я73
К79

Автор и ответственный редактор

Кремер Наум Шевелевич — профессор кафедры математики-1 Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Автор и редактор множества учебников по математике, брошюр и статей по применению математических методов в экономике.

Авторы:

Путко Борис Александрович — доцент кафедры математики-1 Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Автор разделов и глав учебников по математике, статей в области дифференциальных уравнений, топологии и эконометрики;

Тришин Иван Михайлович — доцент кафедры математики-1 Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Автор разделов и глав учебников и учебных пособий по математике, статей в области современной алгебры.

Рецензенты:

Никишкин В. А. — профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики;

Солодовников А. С. — заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Кремер Н. Ш.

К79 Математический анализ : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под ред. Н. Ш. Кремера. — М.: Издательство Юрайт, 2014. — 620 с. — Серия: Бакалавр. Углубленный курс.

ISBN 978-5-9916-2609-5

Эта книга — не только учебник, но и полноценное руководство к решению задач. Основные положения учебного материала дополняются задачами с решениями и для самостоятельной работы, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения математики в экономике.

Существенным отличием книги является наличие в ней наряду с традиционными контрольными заданиями (40 вариантов, около 300 задач) тестовых заданий (18 тестов, около 250 тестовых заданий). Это позволяет эффективно использовать учебник при проведении контрольных работ, тестировании студентов, приеме зачетов и экзаменов, а также при самоконтроле.

Для бакалавров и магистров, обучающихся по направлениям экономики и управления, а также аспирантов и экономистов, преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

УДК 51
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9916-2609-5

Оглавление

Раздел II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел IV
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник написан в соответствии с требованиями федеральных образовательных стандартов третьего поколения (ФГОС-3) по направлениям экономики и управления. Он соответствует Примерной программе дисциплины «Математический анализ», рекомендованной НМС по математике Минобрнауки России по этим направлениям.

При подготовке учебника для экономических вузов авторы руководствовались *принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности.* При введении основных понятий отдавалось предпочтение классическому подходу: так, например, понятие непрерывности функции вводится после рассмотрения понятия предела, определенный интеграл определяется как предел интегральной суммы и т.п. Там, где это возможно, даются геометрический и экономический смыслы математических понятий (например, производной, интеграла и т.д.), приводятся математические формулировки ряда экономических законов (закона убывающей доходности, принципа убывающей предельной полезности, условия оптимальности выпуска продукции), рассматриваются простейшие приложения математики в экономике (предельный анализ, эластичность функции, производственные функции, модели экономической динамики и т.п.). Такие приложения рассчитаны на уровень подготовки студентов первого курса и почти не требуют дополнительной (экономической) информации.

Данный учебник подготовлен на основе учебника [4] тех же авторов. При этом существенно расширена глава «Дифференциальные уравнения» за счет включения в нее материала по разностным уравнениям, которая теперь называется «Дифференциальные и разностные уравнения», а в главу «Степенные ряды» дополнительно включен параграф «Понятие о рядах Фурье».

Известно, что изучение базовых математических дисциплин в вузе осуществляется по апробированной многолетней практикой схеме: лекции— практические занятия — контрольные работы (типовые расчеты, тестирование) — экзамен. Данный учебник написан в соответствии с этой схемой.

Каждая глава учебника содержит «Теоретический курс», в котором раскрывается основное содержание темы и приводятся иллюстрирующие учебный материал решенные практические примеры и задачи, и «Практикум», в котором представлено достаточно большое число типовых и более сложных комплексных задач с решениями и для самостоятельной работы.

В конце каждой главы но представленной в ней теме приводятся как *традиционные тематические контрольные задания* (три варианта по пять — девять задач), так и *тест* (10—15 тестовых заданий). Кроме того, в целом по первой и второй частям дисциплины «Математический анализ»[1] даются *учебно-тренировочные тесты*[2] (шесть тестов по 20 тестовых заданий), *традиционные итоговые контрольные задания* (пять вариантов по восемь задач) и *итоговые тесты* (по 24 тестовых задания).

Учебно-тренировочные тесты могут быть эффективно использованы для контроля (самоконтроля, экспресс-проверки) уровня подготовленности студентов перед курсовыми экзаменами (зачетами), для проверки знаний студентов при подготовке их к аттестации (аккредитации, комплексной проверке) вуза по циклу математических и естественно-научных дисциплин, при решении вопроса о перезачете дисциплин студентам при переводе из другого вуза и т.п.

Более сложные тематические (по главам) и итоговые контрольные задания и тесты могут быть эффективно использованы для аудиторных и домашних контрольных работ, типовых расчетов, собеседований, на зачетах и экзаменах (в частности, письменных), при тестировании студентов (в том числе компьютерном), а также для самоконтроля.

[1] Разделение учебного материала дисциплины на части соответствует примерным срокам их изучения в экономическом вузе (соответственно в I и II семестрах).

[2] Учебно-тренировочные тесты (с. 216-222, 564—570) подготовлены *доц. И. М. Эйсымонт.*

Такое построение книги потребовало сделать изложение теоретического материала более кратким, отказаться без существенного ущерба от малозначащих, громоздких или повторяющихся по своим идеям доказательств утверждений, отличающихся от ранее проведенных лишь техническими деталями. Вместе с тем авторы стремились к более тщательной проработке базовых понятий и доказательств положений, изучение которых предусмотрено настоящим курсом. Для лучшего усвоения учебного материала приведены учебные алгоритмы (схемы) решения определенного круга задач.

Особенностью предлагаемого «Практикума» является то, что значительная часть задач и примеров имеет *экономическое содержание.* Наиболее экономически значимые задачи, представляющие самостоятельный интерес, выделены в отдельные параграфы.

Для оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время все шире используются *методы тестирования,* в частности, с применением современных компьютерных технологий. Существенным отличием данной книги от имеющихся на книжном рынке изданий является то, что наряду *с традиционными контрольными заданиями* (40 вариантов, около 300 задач) в нем предлагается достаточно большое число *тестовых заданий* (18 тестов, около 250 тестовых заданий).

При подготовке тестовых заданий авторы ориентировались в основном на *открытую форму*, когда тестируемый сам получает ответ в виде произвольного числа (целого или записанного в виде десятичной дроби) — одного или нескольких, допускаемых при компьютерном тестировании. Такая форма заданий исключает возможность угадывания правильного ответа, подсказок для его получения.

Приведены также задания *в закрытой форме,* когда тестируемый должен выбрать один или несколько вариантов ответа, предложенных на выбор. При этом авторы отказались от альтернативных тестовых заданий (с двумя вариантами ответа) из-за высокой (0,5) вероятности угадывания правильного ответа. В ряде тестов использовались тестовые задания *на выявление соответствия* между элементами двух групп с ответами в виде соответствующих пар «число — буква», характеризующих порядковые номера элементов в каждой группе.

В отдельных случаях применялись тестовые задания *на установление правильной последовательности элемен-*

тов с ответами в виде последовательности номеров этих элементов.

Изучение представленного в учебнике материала будет способствовать формированию общекультурных и профессиональных *компетенций,* предусмотренных федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения (ФГОС-3) по направлениям экономики и управления (менеджмента), таких как: *владение* культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; *способность* осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач; *способность* выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты; *владение* методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования; *умение* использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования и др.

Согласно ФГОС-3 по направлениям экономики и управления в результате изучения дисциплины «Математический анализ» обучающийся должен *знать* основные понятия дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений и рядов, используемые в экономических исследованиях; *уметь* применять основные классические математические методы решения и строить математические модели прикладных (экономических) задач; *владеть* навыками применения классического математического инструментария для их решения.

Для усвоения учебного материала каждой главы рекомендуется вначале изучить теоретические основы с иллюстрирующими их решенными задачами и примерами, приведенными в «Теоретическом курсе», затем разобрать типовые и более сложные задачи с решениями и решить часть задач для самостоятельной работы из «Практикума». А для проверки уровня подготовленности по материалам каждой главы и дисциплины в целом рекомендуется выполнять тематические и итоговые контрольные и тестовые задания.

При подготовке задач (а их в учебнике около 2000) были использованы различные пособия и методические материалы. Часть задач и, в частности, тестовые задания составлены специально для настоящего учебника. Наряду с авторами в подготовке ряда задач для самостоятельной работы и тестовых заданий принимали также участие преподаватели математических кафедр Финансового университета при Правительстве РФ: доценты Л. Р. Борисова, А. В. Потемкин, А. Ю. Шевелев, а также канд. физ.-мат. наук Е. М. Воробьева.

Ответы всех задач, контрольных и тестовых заданий по главам (кроме итоговых по дисциплине) приводятся в конце учебника. Нумерация задач (как с решениями, так и для самостоятельной работы) единая по каждой главе (начинается в «Теоретическом курсе» и продолжается в «Практикуме»). В конце книги дан развернутый предметный указатель.

Знаком □ обозначаются доказательства теорем и ряда других утверждений, а знаком ■ — их окончание; знаком ▶ отмечаются окончания решений задач.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. А. Никишкину и проф. А. С. Солодовникову за рецензирование рукописи и сделанные ими замечания.

АВТОРЫ:

Н. Ш. Кремер, **профессор (предисловие, введение, гл. 1—3, 9, 10 (кроме параграфа 10.4); а также приложение (совместно с Б. А. Путко»;**

Б. А. Путко, **доцент (гл. 4, 5, а также приложение (совместно с Н. Ш. Кремером»;**

И. М. Тришин, **доцент (гл. 6-8, 10 (параграф 10.4».**

ВВЕДЕНИЕ

Математика — *наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.* В неразрывной связи с запросами науки и техники запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, поэтому приведенное определение необходимо понимать в самом общем смысле.

Академик А. Н. Колмогоров[1] выделяет четыре периода развития математики[2]: зарождения математики, элементарной математики, математики переменных величин, современной математики.

Понимание самостоятельного положения математики как особой науки стало возможным после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в VI—V вв. до н.э. Это было началом *периода элементарной математики.*

В течение этого периода математические исследования базировались лишь на достаточно ограниченном количестве основных понятий, возникших в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Вместе с тем уже на данном этапе происходит качественное совершенствование математики как науки. На основе арифметики постепенно зарождается теория чисел. Появляется алгебра как буквенное исчисление. А созданная древними греками система изложения элементарной геометрии — геометрии Евклида — на два тысячелетия вперед стала образцом дедуктивного построения математической теории.

В XVII в. запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование

[1] Колмогоров Андрей Николаевич (1903—1987) — российский математик.

[2] *Колмогоров А. Н.* Математика / А. Н. Колмогоров // Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988.

геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создания дифференциального и интегрального исчислений начался *период математики переменных величин.*

На первый план выдвигается понятие функции, сыгравшее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины и числа. Изучение функции привело к формулированию основных понятий математического анализа: предела, производной, дифференциала, интеграла. Создание аналитической геометрии позволило существенно расширить предмет изучения геометрии благодаря найденному универсальному способу перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа — методу координат Р. Декарта. С другой стороны, открылась возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

Дальнейшее развитие математики привело в начале XIX в. к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения. Связь математики и естествознания, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает все более сложные формы. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но и вследствие внутренней потребности самой математики. Замечательным примером такой теории является «воображаемая» геометрия Н. И. Лобачевского. Развитие подобного рода исследований в математике XIX—XX вв. позволяет отнести ее к *периоду современной математики.*

Потребности развития самой математики, «математизация» различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению ряда новых математических дисциплин, например, исследование операций, теория игр, математическая экономика и др.

В основе построения математической теории лежит *аксиоматический метод,* при котором в фундамент теории закладываются некоторые исходные положения, называемые *аксиомами* теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом. Примером применения аксиоматического подхода является евклидова геометрия, в которой четко проведена идея получения основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем из небольшого числа аксиом, истинность которых представлялась наглядно очевидной.

Основным методом в математических исследованиях являются *математические доказательства — строгие логические рассуждения.* Член-корреспондент РАН Л. Д. Кудрявцев указывает, что в силу объективной необходимости *логические рассуждения* (которые по своей природе, если они правильные, являются и строгими) *представляют метод математики, без них математика немыслима*[1]. Следует отметить, что математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, оценки ее данных, выделения существенных из них и выбора способа ее решения необходима еще *математическая интуиция*, позволяющая предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений. Но *справедливость рассматриваемого факта доказывается* не проверкой ее на ряде примеров, не проведением серии экспериментов (что само по себе играет большую роль в математических исследованиях), а *чисто логическим путем, по законам формальной логики.*

Сказанное, естественно, не означает, что в предлагаемом курсе высшей математики нужно использовать только «строгие» доказательства, сводя все к аксиомам. Такой задачи авторы не ставили, потому что это не только невозможно в рамках вузовского курса (а тем более краткого курса в экономическом вузе), но часто и нецелесообразно с методической точки зрения, так как в процессе изучения дисциплины в ограниченные сроки необходимо уделять большое внимание разъяснению математических понятий (в том числе и на интуитивном уровне), их геометрическому, физическому и экономическому смыслам, решению практических задач.

В математике изучаются *математические модели.* Это могут быть как непосредственно математические модели реальных явлений, так и объекты (структуры) для изучения этих моделей. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Так, одно и то же дифференциальное уравнение может описывать

[1] *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. М. : Наука, 1985.

процессы роста населения и распада радиоактивного вещества. *Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.*

В математике используются два вида умозаключений: *дедукция* и *индукция*, позволяющие сделать выводы соответственно на основании общих знаний для конкретного случая и, наоборот, на основании частных случаев об общих суждениях. *Принцип математической индукции* гласит, что утверждение $A(n)$, зависящее от натурального параметра n, считается доказанным, если доказано $A(1)$ и для любого натурального числа n из предположения, что верно $A(n)$, доказано, что верно также $A(n+1)$.

При формулировке математических утверждений часто используются *необходимые и достаточные условия*. Пусть рассматривается какое-либо утверждение (положение) B в связи с некоторым утверждением (условием) A. Если из B следует A, т.е. $B \Rightarrow A$, то A называется *необходимым условием* для B, если же из A следует B, т.е. $A \Rightarrow B$, то A называется *достаточным условием* для B. Например, делимость числа на 2 – необходимое условие его делимости на 6 (делимость на 6 $\Rightarrow$ делимость на 2), а, скажем, делимость числа на 12 – достаточное условие его делимости на 6 (делимость на 12 $\Rightarrow$ делимость на 6). Если одновременно верны утверждения $B \Rightarrow A$ и $A \Rightarrow B$, т.е. $A \Leftrightarrow B$, то A называется *необходимым и достаточным условием* для B. Например, для делимости числа на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3, ибо «делимость на 2 и 3 $\Leftrightarrow$ делимость на 6».

Таким образом, необходимые условия – это такие условия, без которых рассматриваемое утверждение заведомо не может быть верным, а достаточные условия – это такие условия, при выполнении которых это утверждение заведомо верно. Выражение «необходимо и достаточно» можно заменить равносильными выражениями «тогда и только тогда», «если и только если», «в том и только в том случае». Необходимые и достаточные условия обладают в математике большой познавательной ценностью.

Математика играет важную роль при проведении естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследований. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования, средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством для решения прикладных задач и универсальным языком науки, но и элементом общей культуры. В связи с этим математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки экономистов и менеджеров.

Основы математики были разработаны в трудах выдающихся ученых: математика и механика Древней Греции Архимеда (287—212 до н.э.); французского философа и математика Р. Декарта (1596—1650); английского физика и математика И. Ньютона (1643—1727); немецкого философа, математика и физика Г. Лейбница (1646—1716); математика, механика и физика Л. Эйлера (1707—1783); французского математика и механика Ж. Лагранжа (1736—1813); немецкого математика К. Гаусса (1777—1855); французского математика О. Коши (1789—1857) и многих других крупнейших ученых.

Большой вклад в развитие математики внесли выдающиеся русские ученые Н. И. Лобачевский (1792—1856), М. В. Остроградский (1801-1861), П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856-1922), А. М. Ляпунов (1857-1918)и др.

Современная российская математическая школа занимает передовое место в мировой математической науке благодаря трудам знаменитых математиков: А. Д. Александрова, П. С. Александрова, В. И. Арнольда, С. Н. Бернштейна, Н. Н. Боголюбова, И. Н. Векуа, И. М. Виноградова, В. М. Глушкова, Л. В. Канторовича, М. В. Келдыша, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева, Ю. В. Линника, А. И. Мальцева, П. С. Новикова, Ю. В. Прохорова, В. И. Смирнова, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова и др.