



ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман

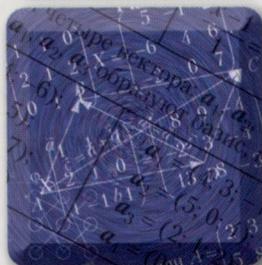
Линейная алгебра

Под редакцией **Н. Ш. Кремера**

б а з о в ы й к у р с

МО
рекомендует

Учебник
и практикум



БАКАЛАВР

 **Юрайт**
ИЗДАТЕЛЬСТВО

biblio-online.ru

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

Под редакцией профессора **Н. Ш. Кремера**

*Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по экономическим специальностям*

*Рекомендовано УМО по образованию в области
математических методов в экономике в качестве учебника
для студентов, обучающихся по специальности 061800
«Математические методы в экономике» и другим
экономическим специальностям*

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва • Юрайт • 2014

УДК 51
ББК 22-143я73
К79

Рецензенты:

Никишкин В. А. — профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (МЭСИ);

Солодовников А. С. — заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Кремер Н. Ш.

К79 Линейная алгебра : учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 307 с. — Серия: Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-2608-8

Эта книга не только учебник, но и полноценное руководство к решению задач. Основные положения учебного материала дополняются задачами с решениями и для самостоятельной работы, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения линейной алгебры в экономике.

Существенным отличием книги является наличие в ней наряду с традиционными контрольными заданиями (20 вариантов, более 130 задач) тестовых заданий (около 150). Это позволяет эффективно использовать учебник при проведении контрольных работ, тестировании студентов, приеме зачетов и экзаменов, а также при самоконтроле.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям экономики и управления, а также для бакалавров и магистров, аспирантов и экономистов, преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

УДК 51
ББК 22.143я73

Оглавление

Предисловие.....	7
Глава 1. Матрицы и определители.....	11
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС	
1.1. Основные сведения о матрицах.....	11
1.2. Операции над матрицами.....	13
1.3. Определители квадратных матриц.....	22
1.4. Свойства определителей.....	27
1.5. Обратная матрица.....	31
1.6. Ранг матрицы.....	34
ПРАКТИКУМ	
1.7. Действия с матрицами.....	41
1.8. Определители квадратных матриц.....	43
1.9. Обратная матрица.....	47
1.10. Ранг матрицы.....	49
1.11. Задачи с экономическим содержанием.....	52
Контрольные задания по главе 1 «Матрицы и определители»	57
Тест 1.....	59
Глава 2. Системы линейных уравнений.....	61
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС	
2.1. Основные понятия и определения.....	61
2.2. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера.....	63
2.3. Метод Гаусса.....	67
2.4. Система m линейных уравнений с n переменными.....	72
2.5. Простейшие матричные уравнения.....	76
2.6. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.....	78
2.7. Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики (балансовый анализ).....	82

ПРАКТИКУМ

2.8. Система n линейных уравнений с n переменными	87
2.9. Система m линейных уравнений с n переменными. Метод Жордана — Гаусса. Фундаментальная система решений.....	95
2.10. Модель Леонтьева — модель многоотраслевой экономики.....	101
Контрольные задания по главе 2 «Системы линейных уравнений».....	103
Тест 2.....	104

Глава 3. Элементы матричного анализа.....107

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве.....	107
3.2. Понятия n -мерного вектора и векторного пространства... ..	113
3.3. Размерность и базис векторного пространства. Изоморфизм.....	115
3.4. Переход к новому базису.....	121
3.5. Линейные подпространства.....	123
3.6. Евклидово пространство.....	127
3.7. Ортогональное дополнение.....	132
3.8. Линейные операторы.....	134
3.9. Образ и ядро, ранг и дефект линейного оператора.....	138
3.10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.....	140
3.11. Квадратичные формы.....	145
3.12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.....	148
3.13. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы.....	151
3.14. Линейная модель обмена. Понятие о теореме Фробениуса—Перрона.....	154

ПРАКТИКУМ

3.15. Векторы на плоскости и в пространстве.....	158
3.16. Векторные пространства.....	162
3.17. Линейные подпространства. Евклидовы пространства	168
3.18. Линейные операторы.....	172
3.19. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы).....	174
3.20. Квадратичные формы.....	178

Контрольные задания по главе 3	
«Элементы матричного анализа».....	183
Тест 3.....	185

Глава 4. Элементы аналитической геометрии.....187

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

4.1. Системы координат. Простейшие задачи.....	187
4.2. Уравнение линии на плоскости.....	189
4.3. Уравнение прямой.....	190
4.4. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.....	195
4.5. Окружность и эллипс.....	198
4.6. Гипербола и парабола.....	202
4.7. Полярные координаты.....	209
4.8. Плоскость и прямая в пространстве.....	211
4.9. Поверхности второго порядка в пространстве.....	216
4.10. Выпуклые множества точек.....	218
4.11. Геометрический смысл решений неравенств и систем неравенств.....	225

ПРАКТИКУМ

4.12. Простейшие задачи. Уравнение прямой на плоскости. . .	227
4.13. Кривые второго порядка.....	236
4.14. Полярные координаты.....	244
4.15. Плоскость и прямая в пространстве.....	245
4.16. Геометрическое решение неравенств и систем неравенств.....	252
Контрольные задания по главе 4	
«Элементы аналитической геометрии».....	255
Тест 4.....	256

Глава 5. Комплексные числа. Многочлены.....258

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

5.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость.....	258
5.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.....	260
5.3. Многочлены.....	265

ПРАКТИКУМ

5.4. Действия над комплексными числами.....	267
---	-----

5.5. Разложение многочленов на множители.....	269
Контрольные задания по главе 5	
«Комплексные числа. Многочлены».....	271
Тест 5.....	272

Контрольные задания и тесты по дисциплине

«Линейная алгебра»

Учебно-тренировочные тесты по дисциплине	
«Линейная алгебра».....	274
Итоговые контрольные задания по дисциплине	
«Линейная алгебра».....	281
Итоговый тест.....	284
Литература.....	287
Ответы.....	289
Предметный указатель.....	300

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник написан в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования третьего поколения (ФГОС ВПО-3) по направлениям экономики и управления (менеджмента). Он соответствует Примерной программе дисциплины «Линейная алгебра», рекомендованной НМС по математике Минобрнауки РФ по этим направлениям.

При подготовке учебника для экономических вузов авторы руководствовались *принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности*. Там, где это возможно, даются геометрический и экономический смыслы математических понятий, рассматриваются простейшие приложения линейной алгебры в экономике (модели Леонтьева, международной торговли и т.п.). Такие приложения рассчитаны на уровень подготовки студентов первого курса и почти не требуют дополнительной (экономической) информации.

Данный учебник подготовлен на основе учебника [6] тех же авторов, в котором линейная алгебра составляет один раздел. Новые требования ФГОС ВПО-3, выделение в нем линейной алгебры в отдельную дисциплину и соответственно представление учебного материала в виде отдельного учебника потребовало углубления его содержания, расширения круга рассматриваемых вопросов. Так, по сравнению с учебником [6] в данный учебник включен ряд новых понятий и дополнительных вопросов, таких как норма матрицы, метод дополнения до базиса, изоморфизм линейных пространств, линейные подпространства, линейная оболочка, алгоритм ортогонализации, ортогональное дополнение, образ и ядро, ранг и дефект линейного оператора, ортогональное преобразование квадратичных форм, поверхности второго порядка и др.

Тема «Выпуклые множества точек» (параграфы 4.10, 4.11, 4.16), строго говоря, не входит в стандартный курс линейной алгебры для экономических вузов. Ее чаще рассматривают во введении к курсам исследования операций, методов оптимальных решений, математического программирования (см., например, [11]). Тем не менее авторы сочли возможным включить эту тему в данный учебник, полагая, что ее изучение в рамках базовой дисциплины «Линейная алгебра» будет способствовать

более рациональному использованию в экономических вузах учебных часов по курсу математики и более эффективному освоению прикладных математических дисциплин.

В результате дополнений существенно расширены гл. 3 и 4, дополнена гл. 5, введены коррективы в гл. 1 и 2.

Известно, что изучение базовых математических дисциплин в вузе осуществляется по апробированной многолетней практикой схеме: лекции — практические занятия — контрольные работы (типовые расчеты, тестирование) — экзамен. Данный учебник написан в соответствии с этой схемой.

Каждая глава учебника содержит «Теоретический курс», в котором раскрывается основное содержание темы и приводятся иллюстрирующие учебный материал решенные практические примеры и задачи, и «Практикум», в котором представлено достаточно большое число типовых и более сложных комплексных задач с решениями и для самостоятельной работы.

В конце каждой главы по представленной в ней теме приводятся как *традиционные тематические контрольные задания* (три варианта по пять — девять задач), так и тест (10—15 тестовых заданий). Кроме того, в целом по дисциплине «Линейная алгебра» даются *учебно-тренировочные тесты*¹ (три теста по 20 тестовых заданий), *традиционные итоговые контрольные задания* (пять вариантов по восемь задач) и *итоговый тест* (24 тестовых задания).

Учебно-тренировочные тесты могут быть эффективно использованы для контроля (самоконтроля, экспресс-проверки) уровня подготовленности студентов перед курсовыми экзаменами (зачетами), для проверки их остаточных знаний при подготовке к аттестации (аккредитации, комплексной проверке) вуза по циклу математических и естественно-научных дисциплин, при решении вопроса о перезачете дисциплины студентам при переводе из другого вуза и т.п.

Более сложные тематические (по главам) и итоговые задания и тесты могут быть эффективно использованы для аудиторных и домашних контрольных работ, типовых расчетов, собеседований, на зачетах и экзаменах (в частности, письменных), при тестировании студентов (в том числе компьютерном), а также для самоконтроля.

Такое построение книги потребовало сделать изложение теоретического материала более кратким, отказаться без существенного ущерба от малозначащих, громоздких или повторяющихся по своим идеям доказательств утверждений, отличающихся от ранее приведенных лишь техническими деталями. Вместе с тем авторы стремились к более тщательной проработке базовых понятий и доказа-

¹ Учебно-тренировочные тесты (с. 274—280) подготовлены доц. И. М. Эйсымонт.

тельств положений, изучение которых предусмотрено настоящим курсом. Для лучшего усвоения учебного материала приведены учебные алгоритмы (схемы) решения определенного круга задач.

Особенностью предлагаемого «Практикума» является то, что часть задач и примеров имеет *экономическое содержание*. Наиболее экономически значимые задачи, представляющие самостоятельный интерес, выделены в отдельные параграфы.

Для оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время все шире используются *методы тестирования*, в частности, с применением современных компьютерных технологий. Существенным отличием данной книги от имеющихся на книжном рынке изданий является то, что наряду с *традиционными контрольными заданиями* (20 вариантов, более 130 задач) в нем предлагается достаточно большое число *тестовых заданий* (9 тестов, около 150 тестовых заданий).

При подготовке тестовых заданий авторы ориентировались в основном на *открытую форму*, когда тестируемый сам получает ответ в виде произвольного числа (целого или записанного в виде десятичной дроби) — одного или нескольких, допускаемых при компьютерном тестировании. Такая форма заданий исключает возможность угадывания правильного ответа, подскоков для его получения.

Приведены также задания *в закрытой форме*, когда тестируемый должен выбрать один или несколько вариантов ответа, предложенных на выбор. При этом авторы отказались от альтернативных тестовых заданий (с двумя вариантами ответа) из-за высокой (0,5) вероятности угадывания правильного ответа. В ряде тестов использовались тестовые задания *на выявление соответствия* между элементами двух групп с ответами в виде соответствующих пар «число — буква», характеризующих порядковые номера элементов в каждой группе.

В отдельных случаях применялись тестовые задания *на установление правильной последовательности элементов* с ответами в виде последовательности номеров этих элементов.

Изучение представленного в учебнике материала будет способствовать формированию *общекультурных и профессиональных компетенций*, предусмотренных ФГОС ВПО-3 по направлениям экономики и управления (менеджмента), таких как: *владение культурой мышления*, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; *способность* осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач; *способность* выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты; *владение* методами количественного

анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования; *умение* использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования и др.

Согласно ФГОС ВПО-3 по направлениям экономики и управления в результате изучения дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен *знать* основные понятия матричного анализа, векторной алгебры и аналитической геометрии, используемые в экономических исследованиях и при изучении других дисциплин естественнонаучного и профессионального циклов; *уметь* применять методы линейной алгебры и строить математические модели прикладных (экономических) задач; *владеть* навыками решения задач линейной алгебры.

Для усвоения учебного материала каждой главы рекомендуется вначале изучить теоретические основы с иллюстрирующими их решенными задачами и примерами, приведенными в «Теоретическом курсе», затем разобрать типовые и более сложные задачи с решениями и решить часть задач для самостоятельной работы из «Практикума». А для проверки уровня подготовленности по материалам каждой главы и дисциплине «Линейная алгебра» в целом рекомендуется выполнить тематические и итоговые контрольные и тестовые задания.

При подготовке задач (а их в учебнике более 700) были использованы различные пособия и методические материалы. Часть задач и, в частности, тестовые задания составлены специально для настоящего учебника. Наряду с авторами в подготовке ряда задач гл. 2 для самостоятельной работы и тестовых заданий принимала участие доц. А. С. Гулько.

Ответы всех задач, контрольных и тестовых заданий по главам (кроме итоговых по дисциплине) приводятся в конце учебника. Нумерация задач (как с решениями, так и для самостоятельной работы) единая по каждой главе (начинается в «Теоретическом курсе» и продолжается в «Практикуме»). В конце книги дан развернутый предметный указатель.

Знаком \square обозначается начало доказательства теоремы, знаком \blacksquare — ее окончание, а знаком \blacktriangleright — окончание решения задачи.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. А. Никишкину и проф. А. С. Солодовникову за рецензирование рукописи и сделанные ими замечания.

Авторы учебника:

Н. Ш. Кремер, профессор — предисловие, гл. 2—5,

М. Н. Фридман, доцент — гл. 1.