И. Л. КАЛИХМАН М. А. ВОЙТЕНКО

Динамическое программирование в примерах и задачах

1979

И. Л. КАЛИХМАН, М. А. ВОЙТЕНКО

Динамическое программирование в примерах и задачах

Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов экономических специальностей вузов

Москва „Высшая школа“ 1979

ББК 22.1
К17
УДК 512+517

Рецензенты:
кафедра высшей математики МИНХ им. Г. В. Плеханова;
докт. техн. наук, проф. А. М. Дубров

Калихман И. Л., Войтенко М. А.

К17 Динамическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие.— М.: Высш. школа, 1979.— 125 с., ил.

20 к.

Настоящее пособие представляет собой руководство к решению задач по динамическому программированию. В нем излагаются общие принципы применения методов динамического программирования к некоторым экономическим задачам оптимизации. Рассматриваются многошаговые детерминированные модели задач оптимального распределения ресурсов, управления запасами, замены оборудования и др. Наряду с решенными примерами в пособии содержится достаточное количество задач для самостоятельного решения.

Предназначается для студентов экономических специальностей вузов.

К $\frac{20204-456}{001(01)-79}$ 33—79 1502000000

517.8
ББК 22.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов экономических специальностей вузов, изучающих методы динамического программирования в качестве раздела общего курса математического программирования. Малое число часов, обычно выделяемых для изучения этого раздела, заставило ограничиться изложением небольшого по объему материала и осветить далеко не все аспекты этой самостоятельной научной дисциплины, посвященной изучению особых методов решения различных задач оптимизации. Вместе с тем пособие может использоваться как задачник с решением типовых задач при изучении более полного курса динамического программирования.

В динамическом программировании можно выделить следующие аспекты: теоретический (доказательства теорем существования, единственности, сходимости), прикладной (построение моделей для конкретных задач оптимизации) и вычислительный. Для студентов экономических вузов решающим является второй и в некоторой степени третий аспект, а с ними легче всего познакомиться на разборе конкретных задач. Этим и руководствовались авторы при подготовке настоящего пособия. Характерные особенности задач динамического программирования и структуру вычислительной схемы лучше всего можно освоить, если провести решение задачи, начиная с составления модели и кончая выполнением необходимых расчетов. Это определило характер задач: в некоторых из них предлагается ограничиться составлением модели, а в некоторых — провести расчеты до получения числового решения. Задачи пришлось ограничить сравнительно несложными и главное негромоздкими (преимущественно одномерными) моделями, чтобы не загромождать понимание основных идей трудоемкими расчетами.

В последние годы опубликовано много книг по динамическому программированию, из которых хотелось бы выделить классические работы Р. Беллмана [1], Г. Вагнера [3] и гл. III книги Е. С. Вентцель [4]. Однако первые две из них слишком объемны и далеко выходят за рамки программы, а в книге [4] мало задач для самостоятельного решения.

Класс задач, решаемых методами динамического программирования, чрезвычайно обширен. Эти задачи могут классифицироваться по содержанию, по характеру моделей и по типу применяемых вычислительных схем. Учитывая прикладную направленность пособия, мы сочли целесообразным придерживаться первого классификационного признака.

В гл. I излагаются общие принципы построения модели динамического программирования и соответствующей вычислительной схемы. В гл. II рассматриваются различные задачи распределения ресурсов. Гл. III посвящена рассмотрению одной из центральных для исследования операций задач управления запасами. В гл. IV рассматривается класс задач о замене, который представляет интерес с точки зрения методов, используемых при их решении. Наконец, в гл. V рассматриваются различные задачи, не приведенные в предыдущих главах. В каждой главе разбираются некоторые типовые задачи и предлагаются задачи для самостоятельного решения. Малый объем пособия не позволил шире осветить применение метода динамического программирования к различным экономическим задачам оптимизации. Каждая глава (кроме гл. I) может изучаться независимо от других и при изучении всего курса может быть пропущена без ущерба для понимания остальных глав.

В книге принята независимая нумерация формул, задач и таблиц в пределах каждой главы.

В пособии использованы материалы по динамическому программированию из методического руководства по математическому программированию, изданного в Московском финансовом институте в 1971 г. Авторы благодарны членам кафедры математики МФИ, которые прочитали пособие в рукописи и сделали ряд ценных замечаний.

Авторы будут признательны за все замечания, направленные на улучшение данного пособия.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Модель динамического программирования

Динамическое программирование — метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие операции называются *многошаговыми*.

Как раздел математического программирования, динамическое программирование (ДП) начало развиваться в 50-х годах XX в. благодаря работам Р. Беллмана и его сотрудников. Впервые этим методом решались задачи оптимального управления запасами, затем класс задач значительно расширился. Как практический метод оптимизации, метод динамического программирования стал возможен лишь при использовании современной вычислительной техники.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Беллманом. Этот принцип и идея включения конкретной задачи оптимизации в семейство аналогичных многошаговых задач приводят к рекуррентным соотношениям — функциональным уравнениям — относительно оптимального значения целевой функции. Их решение позволяет последовательно получить оптимальное управление для исходной задачи оптимизации.

Рис. 1

Дадим общее описание модели динамического программирования.

Рассматривается управляемая система, которая под влиянием управления переходит из начального состояния $\bar{\xi}_0$ в конечное состояние $\bar{\xi}_n$. Предположим, что процесс управления системой можно разбить на n шагов. Пусть $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$ — состояния системы после первого, второго, ..., n-го шага. Схематически это показано на рис. 1.

Состояние $\bar{\xi}_k$ системы после k-го шага ($k=1, 2, \ldots, n$) характеризуется параметрами $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(s)}$, которые называются *фазовыми координатами.* Состояние $\bar{\xi}_k$ можно изобразить точкой s-мерного пространства, называемого *фазовым пространством.* Последовательное преобразование системы (по шагам) достигается с помощью некоторых мероприятий $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$, которые составляют управление системой

$$U=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n),$$

где $\bar{u}_k$ — управление на k-м шаге, переводящее систему из состояния $\bar{\xi}_{k-1}$ в состояние $\bar{\xi}_k$ (рис. 1). Управление $\bar{u}_k$ на k-м шаге заключается в выборе значений определенных управляющих переменных * $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(n)}$.

Предполагаем впредь, что состояние системы в конце k-го шага зависит только от предшествующего состояния системы $\bar{\xi}_{k-1}$ и управления $\bar{u}_k$ на данном шаге (рис. 1). Такое свойство получило название *отсутствия последействия.* Обозначим эту зависимость в виде

$$\bar{\xi}_k=F_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k), \tag{1.1}$$

Равенства (1.1) получили название *уравнений состояний.* Функции $F_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k)$ полагаем заданными.

Варьируя управление U, получим различную «эффективность» процесса **, которую будем оценивать количественно целевой функцией Z, зависящей от начального состояния системы $\bar{\xi}_0$ и от выбранного управления U:

$$Z=\Phi(\bar{\xi}_0, U). \tag{1.2}$$

Показатель эффективности k-го шага процесса управления, который зависит от состояния $\bar{\xi}_{k-1}$ в начале этого шага и управления $\bar{u}_k$, выбранного на этом шаге, обозначим через $f_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k)$ (рис. 1). В рассматриваемой зада-

---

* Управление на k-м шаге может характеризоваться качественно. Например, в задаче о замене оборудования (см. гл. IV) $u_k^{(\text{с})}$ означает сохранение оборудования, $u_k^{(\text{з})}$ — замену старого оборудования новым.

** Термин «эффективность» понимается как некоторая оценка результата процесса. Она может выражать собой показатель, который желательно максимизировать (например, прибыль, фондоотдача, производительность), или показатель, который необходимо минимизировать (например, затраты, себестоимость, потери).

че пошаговой оптимизации целевая функция (1.2) должна быть аддитивной, т. е.

$$Z=\sum_{k=1}^{n} f_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k). \tag{1.3}$$

Если свойство аддитивности целевой функции Z не выполняется, то этого иногда можно добиться некоторыми преобразованиями функции. Например, если Z — мультипликативная функция, заданная в виде

$$Z=\prod_{k=1}^{n} f_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k),$$

то можно рассмотреть функцию $Z'=\log Z$, которая является аддитивной.

Обычно условиями процесса на управление на каждом шаге $\bar{u}_k$ накладываются некоторые ограничения. Управления, удовлетворяющие этим ограничениям, называются *допустимыми*.

Задачу пошаговой оптимизации можно сформулировать так: определить совокупность допустимых управлений $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$, переводящих систему из начального состояния $\bar{\xi}_0$ в конечное состояние $\bar{\xi}_n$ и максимизирующих или минимизирующих показатель эффективности (1.3).

Для единообразия формулировок (но не вычислительных процедур!) в дальнейшем мы будем говорить только о задаче максимизации, имея в виду, что если необходимо минимизировать Z, то, заменив Z на $Z'=-Z$, перейдем к максимизации Z'.

Начальное состояние $\bar{\xi}_0$ и конечное состояние $\bar{\xi}_n$ могут быть заданы однозначно или могут быть указаны множество Ω_0 начальных состояний и множество Ω_n конечных состояний так, что $\bar{\xi}_0 \in \Omega_0$, $\bar{\xi}_n \in \Omega_n$. В последнем случае в задаче пошаговой оптимизации требуется определить совокупность допустимых управлений, переводящих систему из начального состояния $\bar{\xi}_0 \in \Omega_0$ в конечное состояние $\bar{\xi}_n \in \Omega_n$ и максимизирующих целевую функцию (1.3). Управление, при котором достигается максимум целевой функции (1.3), называется *оптимальным управлением* и обозначается через $U^*=(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \ldots, \bar{u}_n^*)$.

Если переменные управления $\bar{u}_k$ принимают дискретные значения, то модель ДП называется *дискретной*. Если же указанные переменные изменяются непрерывно, то модель ДП называется *непрерывной*. В зависимости от числа параметров состояний (s) и числа управляющих переменных на каждом шаге (r) различают одномерные и многомерные модели ДП *. Число шагов в задаче может быть либо конечным, либо бесконечным.

Динамическое программирование применяется при оптимизации как детерминированных, так и стохастических процессов.

В некоторых задачах, решаемых методом ДП, процесс управления естественно разбивается на шаги. Например, при распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом естественно считать временной период; при распределении средств между n предприятиями номером шага естественно считать номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на некоторые временные отрезки — шаги. Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

§ 2. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана

Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно, шаг за шагом. На каждом шаге оптимизируется управление только этого шага. Вместе с тем на каждом шаге управление выбирается с учетом последствий, так как управление, оптимизирующее целевую функцию только для данного шага, может привести к неоптимальному эффекту всего процесса. Управление на каждом шаге должно быть оптимальным с точки зрения процесса в целом.

Иллюстрацией к сказанному выше может служить задача о выборе кратчайшего пути для перехода из точки A в точку B, если маршрут должен пройти через некото-

* Определение одномерной и многомерной модели ДП см. на с. 29.

рые пункты. На рис. 2 эти пункты обозначены кружками, а соединяющие их дороги — отрезками, рядом с которыми проставлены соответствующие расстояния.

С точки зрения интересов оптимизации только каждого ближайшего шага — выбора кратчайшего пути из данной точки в соседнюю — следует двигаться по маршруту, проходящему через точки A, A_1, A_3, A_2, A_4, B. Длина этого маршрута равна 34. Такой путь из A в B не является кратчайшим. Например, маршрут, проходящий через точки A, A_3, A_4, B, имеет меньшую длину, равную

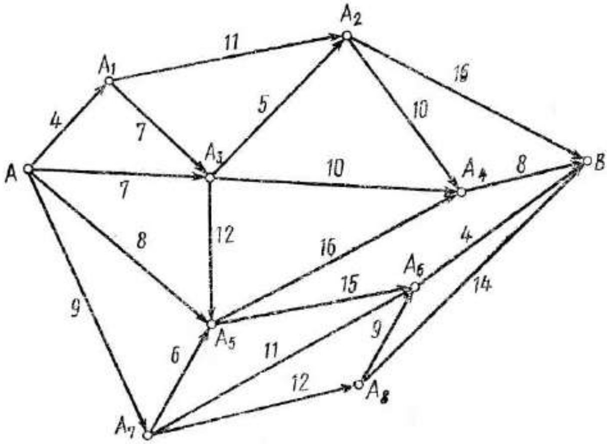

Рис. 2

25. Решив эту задачу, мы убедимся, что второй путь также не является оптимальным (см. гл. V, § 4).

Приведенный пример многошаговой операции показывает, что управление на каждом шаге надо выбирать с учетом его последствий на предстоящих шагах. Это основное правило ДП, сформулированное Р. Беллманом, называется **принципом оптимальности.**

Оптимальное управление обладает таким свойством, что *каково бы ни было начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага.*

Использование этого принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, является не локально лучшим, а лучшим с точки зрения процесса в целом.

Так, если система в начале k-го шага находится в состоянии $\bar{\xi}_{k-1}$ и мы выбираем произвольное управление $\bar{u}_k$, то система придет в новое состояние $\bar{\xi}_k = F(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k)$, и дальнейшие управления $\bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_n$ должны выбираться оптимальными относительно состояния $\bar{\xi}_k$. Последнее означает, что при этих управлениях максимизируется показатель эффективности на последующих до конца процесса шагах $k+1, \dots, n$, т. е. величина $\sum\limits_{i=k+1}^{n} f_i(\bar{\xi}_{i-1}, \bar{u}_i)$. Показатель, характеризующий суммарную эффективность от данного k-го до последнего n-го шага, будем обозначать через Z_k, т. е. $Z_k = \sum\limits_{i=k}^{n} f_i(\bar{\xi}_{i-1}, \bar{u}_i)$. Задача оптимизации процесса, начиная с k-го до последнего n-го шага (рис. 3), похожа на исходную при начальном состоянии системы $\bar{\xi}_{k-1}$, управлении $U_k = (\bar{u}_k, \dots, \bar{u}_n)$ и показателе эффективности $Z_k = \Phi(\bar{\xi}_{k-1}, U_k)$ [аналогично (1.2)]. Выбрав оптимальное управление U_k^* на оставшихся $n-k+1$ шагах, получим величину $Z_k^* = \max Z_k$, которая зависит только от $\bar{\xi}_{k-1}$, т. е.

$$Z_k^*(\bar{\xi}_{k-1}) = \max_{U_k} \Phi(\bar{\xi}_{k-1}, U_k) = \Phi(\xi_{k-1}, U_k^*). \qquad (1.4)$$

Назовем величину Z_k^* $(\bar{\xi}_{k-1})$ *условным максимумом.* Если теперь мы выберем на k-м шаге некоторое произвольное управление $\bar{u}_k$, то система придет в состояние $\bar{\xi}_k$. Согласно принципу оптимальности, какое бы $\bar{u}_k$ мы ни выбрали, на последующих шагах управление $(\bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_n)$ должно выбираться так, чтобы показатель эффективности Z_{k+1} достигал максимального значения, равного $Z_{k+1}^*(\xi_k)$. Остается выбрать управление $\bar{u}_k$. Его нельзя выбирать из условия локальной максимизации показателя эффективности на данном k-м шаге, лишь бы получить $\max f_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k)$. Такой подход был бы недальновидным, поскольку от выбора $\bar{u}_k$ зависит новое состояние $\bar{\xi}_k$, а от последнего — максимально возможная эффективность, которая может быть достигнута в дальнейшем, т. е. величина $Z_{k+1}^*(\bar{\xi}_k)$. Поэтому необходимо выбирать управление $\bar{u}_k$ так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на последующих шагах (начиная с $(k+1)$-

го) приводило бы к общему максимуму показателя эффективности на $n-k+1$ шагах, начиная с k-го до конца. Это положение в аналитической форме можно записать в виде следующего соотношения:

$$Z_k^*(\bar{\xi}_{k-1}) = \max_{\bar{u}_k} \{f_k(\bar{\xi}_{k-1}, \bar{u}_k) + Z_{k+1}^*(\bar{\xi}_k)\} \tag{1.5}$$

получившего название *основного функционального уравнения ДП,* или *уравнения Беллмана.* Схематически соотношение (1.5) иллюстрируется на рис. 3.

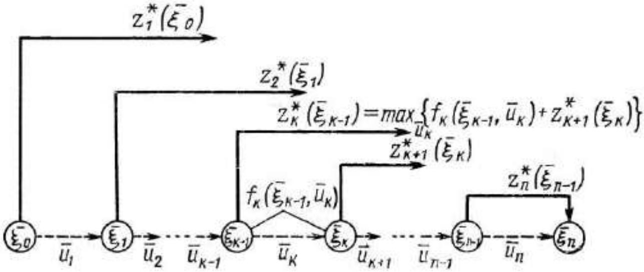

Рис. 3

Из уравнения (1.5) может быть получена функция $Z_{n-1}^*(\bar{\xi}_{n-2})$, если известна функция $Z_n^*(\bar{\xi}_{n-1})$; аналогично можно получить $Z_{n-2}^*(\bar{\xi}_{n-3})$, если найдена $Z_{n-1}^*(\bar{\xi}_{n-2})$, и т. д., пока не будет определена величина $Z_1^*(\bar{\xi}_0)$, представляющая по определению максимальное значение показателя эффективности процесса в целом:

$$Z_1^*(\bar{\xi}_0) = \max_U \Phi(\bar{\xi}_0, U).$$

Соотношения (1.5) для определения последовательности функций $Z_k^*(\bar{\xi}_{k-1})$ через $Z_{k+1}^*(\bar{\xi}_k)$ $(k=n, n-1, \ldots, 1)$ получили название *основных рекуррентных уравнений Беллмана.*

Решая уравнение (1.5) для определения условного максимума показателя эффективности за $n-k+1$ шагов, начиная с k-го, мы определяем соответствующее оптимальное управление $\bar{u}_k$, при котором этот максимум достигается. Это управление также зависит от $\bar{\xi}_{k-1}$. Будем обозначать такое управление через $\bar{u}_k^*(\bar{\xi}_{k-1})$ и называть *условным оптимальным управлением на k-м шаге.*

Основное значение уравнения (1.5), в котором реализована идея динамического программирования, заключается в том, что решение исходной задачи определения максимума функции (1.2) n переменных $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ сводится к решению последовательности n задач, задаваемых соотношениями (1.5), каждое из которых является задачей максимизации функции одной переменной $\bar{u}_k$. Эти задачи оказываются взаимосвязанными, так как в соотношении (1.5) при определении $Z_k^*(\bar{\xi}_{k-1})$ учитывается найденная при решении предыдущей задачи функция $Z_{k+1}^*(\bar{\xi}_k)$.

§ 3. Пример построения модели ДП и построения вычислительной схемы

Прежде чем рассмотреть общую вычислительную схему ДП, рассмотрим конкретную задачу, на примере которой вновь повторим основные положения предыдущего параграфа и покажем, как выполняются расчеты по уравнениям (1.5).

Задача 1. Планируется распределение начальной суммы средств ξ_0 между n предприятиями $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Предполагается, что выделенные предприятию Π_k в начале планового периода средства x_k приносят доход $f_k(x_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Будем считать, что:

1) доход, полученный от вложения средств в предприятие Π_k, не зависит от вложения средств в другие предприятия;

2) доход, полученный от разных предприятий, выражается в одинаковых единицах;

3) общий доход равен сумме доходов, полученных от распределения всех средств по всем предприятиям.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход был максимальным.

Запишем математическую модель задачи.

Общий доход выражается целевой функцией

$$Z=\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k). \qquad (*)$$

Переменные x_k должны удовлетворять условиям

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\xi_0; \; x_k \geqslant 0 \quad (k=1,\ldots, n). \qquad (**)$$

Требуется определить переменные $x_1, \dots, x_n$, которые удовлетворяют ограничениям (**) и обращают в максимум целевую функцию (*).

Аналогичная задача оптимизации решалась в классическом анализе с помощью множителей Лагранжа. В прикладных задачах классический метод Лагранжа, как правило, неприменим по многим причинам и прежде всего — по причине размерности. Искать абсолютный максимум функции n переменных, даже если эта функция дифференцируема, дело трудоемкое. Если к тому же учесть, что экстремум может достигаться на границе, то к исследованию стационарных точек внутри области прибавляется исследование стационарных точек на ее границе. В практических задачах переменные x_k могут принимать дискретные значения (например, средства выделяются в размерах, кратных 10 ед.), а функции дохода $f_k(x_k)$ могут быть недифференцируемыми или даже заданными таблично. Во всех этих случаях классические методы оптимизации неприменимы. К решению задачи можно применить методы нелинейного программирования. Однако и они оказываются эффективными лишь при ряде дополнительных свойств функций $f_k(x_k)$, которые на практике часто не выполняются. Наконец, иногда бывает важно не только получить решение конкретной задачи при определенных ξ_0 и n, но и исследовать чувствительность решения к изменению этих исходных данных, что при использовании классических методов затруднительно.

Мы покажем, как с помощью методов ДП указанные трудности легко преодолеваются.

Перейдем к описанию задачи в виде модели ДП. Внутреннее свойство процесса распределения средств между n предприятиями позволяет рассматривать его как n-шаговый процесс. За номер k-го шага примем номер предприятия, которому выделяются средства x_k. На 1-м шаге выделяем 1-му предприятию средства x_1, на 2-м шаге — 2-му предприятию выделяем средства x_2 из оставшихся и т. д. Очевидно, что переменные x_k $(k=1, \dots, n)$ можно рассматривать как управляющие переменные. Начальное состояние системы характеризуется величиной ξ_0 средств, подлежащих распределению. После выделения x_1 остается $\xi_1=\xi_0-x_1$ средств и т. д. Величины $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, характеризующие остаток средств после распределения на предшествующих шагах, будем рассматривать как параметры состояния. Уравнениями состояния служат равенства

$$\xi_k = \xi_{k-1} - x_k \quad (k=1,\ldots, n). \tag{1.6}$$

Суммарный доход за n шагов составляет

$$Z = \Phi(\xi_0,\ U) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \tag{1.7}$$

и представляет собой показатель эффективности процесса, имеющий, как видно из этого равенства, аддитивную форму.

Если к началу k-го шага остаток средств равен ξ_{k-1}, то доход, который можно получить на оставшихся $n-k+1$ шагах (т. е. от выделения средств предприятиям $\Pi_k, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$), составит $Z_k = \sum\limits_{i=k}^{n} f_i(x_i)$.

Максимальный доход за эти $n-k+1$ шагов зависит от того, сколько средств осталось от предыдущих $k-1$ шагов, т. е. от величины ξ_{k-1}. Поэтому будем его обозначать через $Z_k^*(\xi_{k-1})$. Очевидно, что $Z_1^*(\xi_0) = Z_{\max}$, т. е. $Z_1^*(\xi_0)$ представляет собой суммарный максимальный доход за n шагов (доход, полученный при оптимальном распределении средств ξ_0 между n предприятиями).

Рассмотрим любой k-й шаг. Очевидно, что x_k можно выбирать из условия $0 \leqslant x_k \leqslant \xi_{k-1}$. Значение x_k, удовлетворяющее этому двойному неравенству, называется *допустимым*. Принцип оптимальности в этом конкретном случае означает, что, выделив величину x_k и получив от k-го предприятия доход $f_k(x_k)$, мы должны распорядиться оставшимися средствами $\xi_k = \xi_{k-1} - x_k$ наивыгоднейшим образом и получить от предприятий $\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$ максимальный доход $Z_{k+1}^*(\xi_k)$. Ясно, что величину x_k следует определять из условия максимизации суммы $f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k)$. Таким образом, получаем уравнение

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leqslant x_k \leqslant \xi_{k+1}} \{f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\}, \tag{1.8}$$

называемое *уравнением Беллмана*.

Перейдем к схеме вычислений. Нас интересует $Z_1^*(\xi_0)$, но если начать с 1-го шага, т. е. с решения задачи

$$Z_1^*(\xi_0) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_0} \{f_1(x_1) + Z_2^*(\xi_1)\},$$

то необходимо знать $Z_2^*(\xi_1)$. В свою очередь, при определении $Z_2^*(\xi_1)$ нужно знать $Z_3^*(\xi_2)$ и т. д. Однако имеется шаг, за которым нет последующих. Таким является n-й шаг, на котором выделяются средства последнему предприятию Π_n. Для него равенство (1.8) имеет вид

$$Z_{n-1}^*(\xi_{n-1}) = \max_{0 \leq x_n \leq \xi_{n-1}} \{f_n(x_n)\}. \tag{1.9}$$

Будем считать, что функция дохода $f_n(x_n)$ монотонно возрастает, поэтому решением этой задачи является условное оптимальное управление $x_n^*(\xi_{n-1})$, при котором достигается условный максимум $Z_n^*(\xi_{n-1}) = f_n(x_n^*)$. Следовательно, предприятию Π_n выделяются все оставшиеся средства ξ_{n-1}, которые приносят доход $f_n(\xi_{n-1})$. Вернемся к предыдущему, $(n-1)$-му шагу, в начале которого имеется остаток средств ξ_{n-2}. Уравнение (1.8) в этом случае примет вид

$$Z_{n-1}^*(\xi_{n-2}) = \max_{0 \leq x_{n-2} \leq \xi_{n-2}} \{f_{n-1}(x_{n-1}) + Z_n^*(\xi_{n-1})\}.$$

Здесь оптимальный выбор x_{n-1} не столь очевиден, как при решении предыдущей задачи (1.9). Прежде всего, выразив из уравнения состояния ξ_{n-1} через $\xi_{n-2} - x_{n-1}$, получим

$$Z_{n-1}^*(\xi_{n-2}) = \max_{0 \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-2}} \{f_{n-1}(x_{n-1}) + Z_n^*(\xi_{n-2} - x_{n-1})\}. \tag{1.10}$$

Оба слагаемых в фигурных скобках — известные функции, зависящие от управляющей переменной x_{n-1}. Параметр ξ_{n-2} является начальным состоянием для данной задачи. Выполнив исследование на максимум функции $Z_{n-1}(x_{n-1}, \xi_{n-2}) = f_{n-1}(x_{n-1}) + Z_n^*(\xi_{n-2} - x_{n-1})$ от одной переменной x_{n-1}, получим условное оптимальное управление $x_{n-1}^*(\xi_{n-2})$ и соответствующий условный максимум суммарного дохода $Z_{n-1}^*(\xi_{n-2})$. На языке данной задачи это решение означает, что если перед выделением средств предприятию Π_{n-1} в нашем распоряжении имеется остаток ξ_{n-2}, то предприятию Π_{n-1} необходимо выделить $x_{n-1}^*(\xi_{n-2})$ средств. При этом сумма доходов от предприятий Π_{n-1} и Π_n достигает максимума.

Закончив решение задачи (1.10), перейдем к следующему с конца $(n-2)$-му шагу, определим аналогичным образом условное оптимальное управление $x_{n-2}^*(\xi_{n-3})$

и соответствующий остатку ξ_{n-3} условный максимум $Z^*_{n-2}(\xi_{n-3})$ и т. д.

В результате, проходя последовательно все шаги с конца процесса распределения к его началу (т. е. к 1-му шагу), получим две последовательности функций:

$$Z^*_n(\xi_{n-1}),\ Z^*_{n-1}(\xi_{n-2}),\dots,\ Z^*_2(\xi_1),\ Z^*_1(\xi_0)$$

(условные максимальные доходы) и

$$x^*_n(\xi_{n-1}),\ x^*_{n-1}(\xi_{n-2}),\dots,\ x^*_2(\xi_1),\ x^*_1(\xi_0)$$

(условные оптимальные управления).

Этим завершается первый и основной этап вычислительного процесса, получивший название *условной оптимизации.*

Теперь приступаем ко второму этапу вычислительной схемы — *безусловной оптимизации.* На этом этапе прежде всего, зная функцию $Z_1^*(\xi_0)$, по заданному значению ξ_0^* определяем * $Z_{\max}=Z_1^*(\xi_0^*)$. Далее, обращаемся к последовательности $x_k^*(\xi_{k-1})$, которую проходим от начала к концу процесса. Выделяем $x_1^*=x_1^*(\xi_0^*)$ 1-му предприятию; тогда для распределения остается $\xi_1^*=\xi_0^*-x_1^*$. По этой величине определяем оптимальное количество средств $x_2^*=x_2^*(\xi_1^*)$, выделяемых 2-му предприятию. Снова находим $\xi_2^*=\xi_1^*-x_2^*$, после чего определяем x_3^*, и т. д., пока не будет определено искомое оптимальное управление $(x^*_1,\ x^*_2,\dots,x^*_n)$.

§ 4. Числовой пример

Решим теперь задачу о распределении средств при заданных конкретных условиях. Тем самым на числовом примере мы продемонстрируем общую вычислительную схему, рассмотренную в § 3, а также покажем, как организуются расчеты.

Задача 2. Решить задачу 1 по следующим данным: 1) $\xi_0=200$ млн. руб.; 2) $n=4$; 3) средства выделяются только в размерах, кратных 40 млн. руб.; 4) функции дохода на каждом из четырех предприятий заданы в табл. 1:

---

* Звездочки, помещенные над параметрами состояния, указывают на определенные значения этих параметров, вычисленные на этапе безусловной оптимизации.

Таблица 1

x \ f	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	8	6	3	4
80	10	9	4	6
120	11	11	7	8
160	12	13	11	13
200	18	15	18	16

Условие 3) определяет дискретность задачи, а наличие на каждом шаге только одной переменной управления и одного параметра состояния показывают, что задача является одномерной. Учитывая это условие, можно было бы принять за единицу масштаба 40 млн. руб. Вследствие этого $\xi_0=5$ ед. и возможные значения для управляющих переменных были бы равны 0, 1, 2, 3 и 4. Однако мы сохраним реальные единицы, в которых указаны исходные данные.

В соответствии с обозначением § 3 имеем четыре управляющие переменные x_1, x_2, x_3, x_4 и пять параметров состояния ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Уравнениями состояния служат следующие равенства:

$$\xi_1=\xi_0-x_1;\ \xi_2=\xi_1-x_2;\ \xi_3=\xi_2-x_3;\ \xi_4=\xi_3-x_4. \qquad (1.11)$$

Уравнение Беллмана запишется в форме (1.8). Данный процесс является четырехшаговым. При этом, так как на последнем шаге (при $k=5$) процесс завершается и прибыль на «последующих» шагах отсутствует, то и $Z_5^*(\xi_4)=0$. Запишем уравнение (1.8) для последнего шага:

$$Z_4^*(\xi_3)=\max_{0\leq x_4\leq \xi_3}\{f_4(x_4)\} \qquad (1.12)$$

и для всех предыдущих ($k=3, 2, 1$) шагов:

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{0\leq x_k\leq \xi_{k-1}}\{f_k(x_k)+Z_{k+1}^*(\xi_k)\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках последнего равенства, обозначим через

$$Z_k(\xi_{k-1},\ x_k)=f_k(x_k)+Z_{k+1}^*(\xi_k), \qquad (1.13)$$

где $\xi_k = \xi_{k-1} - x_k$. Тогда уравнение Беллмана для любого шага запишется в виде

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leqslant x_k \leqslant \xi_{k-1}} \{Z_k(\xi_{k-1}, x_k)\}. \qquad (1.14)$$

Расчеты располагаем в двух таблицах — основной, в которой помещаем результаты условной оптимизации, т. е. последовательность функций $Z_k^*(\xi_{k-1})$ и $x_k^*(\xi_{k-1})$, и вспомогательной, в которой определяем $Z_k(\xi_{k-1}, x_k)$ и выполняем условную оптимизацию. (В некоторых задачах могут использоваться несколько вспомогательных таблиц, а основная может отсутствовать.)

В основной таблице входом является параметр ξ, для которого возможны значения 0, 40, 80, 120, 160 и 200 (см. табл. 2).

Таблица 2 (основная)

ξ	4-й шаг		3-й шаг		2-й шаг		1-й шаг	
	$Z_4^*(\xi_3)$	$x_4^*(\xi_3)$	$Z_3^*(\xi_2)$	$x_3^*(\xi_2)$	$Z_2^*(\xi_1)$	$x_2^*(\xi_1)$	$Z_1^*(\xi_0)$	$x_1^*(\xi_0)$
40	4	40	4	0	6	40	8	40
80	6	80	7	40	10	40	14	40
120	8	120	9	40	13	80 (40)	18	40
160	13	160	13	0	16	80	21	40
200	16	200	18	200	19	40	24	40

Условную оптимизацию начнем с расчета 4-го шага, для чего используем уравнение (1.12). Так как функция дохода $f_4(x_4)$ монотонно возрастает (чем больше вкладывается средств, тем больше доход), то ее максимум достигается при наибольшем значении $x_4(\xi_3) = \xi_3$. При этом получим $Z_4^*(\xi_3) = f_4(\xi_3)$, где $0 \leqslant \xi_3 \leqslant 200$. Этот результат условной оптимизации 4-го шага помещаем непосредственно во 2-й и 3-й столбцы табл. 2, переписав необходимые данные из последнего столбца табл. 1. Условная оптимизация 3, 2 и 1-го шагов выполняется сначала в табл. 3. Расчет ведется по формулам (1.13) и (1.14) при $k=3$, $k=2$, $k=1$.

Поясним построение табл. 3 и последовательность проведения расчетов. Так как условная оптимизация ве-

Таблица 3

$k = 3, 2, 1$			3-й шаг ($k = 3$)			2-й шаг ($k = 2$)			1-й шаг ($k = 1$)		
ξ_{k-1}	x_k	$\xi_k=\xi_{k-1}-x_k$	$f_3(x_3)$	$Z_4^*(\xi_3)$	$Z_3(\xi_2, x_3)$	$f_2(x_2)$	$Z_3^*(\xi_2)$	$Z_2(\xi_1, x_2)$	$f_1(x_1)$	$Z_2^*(\xi_1)$	$Z_1(\xi_0, x_1)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
40	0	40	0	4	$0+4=\underline{4}$	0	4	$0+4=4$	0	6	$0+6=6$
	40	0	3	0	$3+0=3$	6	0	$6+0=\underline{6}$	8	0	$8+0=\underline{8}$
80	0	80	0	6	$0+6=6$	0	7	$0+7=7$	0	10	$0+10=10$
	40	40	3	4	$3+4=7$	6	4	$6+4=10$	8	6	$8+6=14$
	80	0	4	0	$4+0=\overline{4}$	9	0	$9+0=\overline{9}$	10	0	$10+0=\overline{10}$
120	0	120	0	8	$0+8=8$	0	9	$0+9=9$	0	13	$0+13=13$
	40	80	3	6	$3+6=9$	6	7	$6+7=13$	8	10	$8+10=18$
	80	40	4	4	$4+4=\overline{8}$	9	4	$9+4=\overline{13}$	10	6	$10+6=\overline{16}$
	120	0	7	0	$7+0=7$	11	0	$11+0=11$	11	0	$11+0=11$
160	0	160	0	13	$0+13=13$	0	13	$0+13=13$	0	16	$0+16=16$
	40	120	3	8	$3+8=\overline{11}$	6	9	$6+9=15$	8	13	$8+13=21$
	80	80	4	6	$4+6=10$	9	7	$9+7=16$	10	10	$10+10=\overline{20}$
	120	40	7	4	$7+4=11$	11	4	$11+4=\overline{15}$	11	6	$11+6=17$
	160	0	11	0	$11+0=11$	13	0	$13+0=13$	12	0	$12+6=12$
200	0	200	0	16	$0+16=16$	0	18	$0+18=18$	0	19	$0+19=19$
	40	160	3	13	$13+3=16$	6	13	$6+13=19$	8	16	$8+16=24$
	80	120	4	8	$4+8=12$	9	9	$9+9=\overline{18}$	10	13	$10+13=\overline{23}$
	120	80	7	6	$7+6=13$	11	7	$11+7=18$	11	10	$11+10=21$
	160	40	11	4	$11+4=15$	13	4	$13+4=17$	12	6	$12+6=18$
	200	0	18	0	$18+0=\underline{18}$	15	0	$15+0=15$	18	0	$18+0=18$

дется на всех шагах по единообразным равенствам (1.13) и (1.14), то первые три столбца табл. 3 являются общими для всех трех шагов. Состояния в начале и в конце k-го шага и управление на k-м шаге обозначены через ξ_{k-1}, ξ_k и x_k. Поясним вначале порядок заполнения этих столбцов. Если $\xi_{k-1}=40$, то соответствующие управления могут быть $x_k=0$ и $x_k=40$ (2-й столбец). Соответствующие состояния в конце шага определяются по уравнению состояния $\xi_k=\xi_{k-1}-x_k$ и принимают соответственно значения $40-0=40$ и $40-40=0$ (3-й столбец). Так последовательно заполняются три столбца для $\xi_{k-1}=40$; 80; 120; 160; 200.

Теперь перейдем к выполнению условий оптимизации на 3-м шаге. При этом используются формулы $Z_3(\xi_2, x_3) = f_3(x_3)+Z_4^*(\xi_3)$ и $Z_3^*(\xi_2)=\max\limits_{0\leqslant x_3\leqslant \xi_2} Z_3(\xi_2, x_3)$, которые последовательно развернуты по строкам в 4, 5 и 6-м столбцах. Если $\xi_2=40, x_3=0$ и $\xi_3=40$ (1-я строка первых трех столбцов), то получим $f_3(x_3)=f_3(0)=0$ (из табл. 1), $Z_4^*(\xi_3)=Z_4^*(40)=4$ (из табл. 2) и $Z_3(\xi_2, x_3)=0+4=4$. Эти числа заносятся в 1-ю строку 4, 5 и 6-го столбцов. Аналогично заполняются все остальные строки этих же столбцов.

Сравнив величины $Z_3(\xi_2, x_3)$ при одном и том же значении ξ_2, выбираем наибольшее число, которое равно величине $Z_3^*(\xi_2)$ (в табл. 3 это значение подчеркнуто). Соответствующие им условные оптимальные управления $x_3^*(\xi_2)$ стоят в той же строке табл. 3 (во 2-м столбце). Выполнив условную оптимизацию 3-го шага, переносим в табл. 2 против соответствующих значений $\xi=\xi_2$ подчеркнутые значения $Z_3^*(\xi_2)$ и соответствующие им $x_3^*(\xi_2)$.

Условная оптимизация 2-го шага выполняется по 7, 8 и 9-й строкам во всех столбцах табл. 3 аналогичным образом.

Приведем в качестве примера подробный расчет для $\xi_1=160$ (четвертая секция табл. 3). При $x_2=0$ и $\xi_2=\xi_1-x_2=160$ получим $f_2(x_2)=f(0)=0$, $Z_3^*(\xi_2)=Z_3^*(160)=13$ (из табл. 2), поэтому $Z_2(\xi_1, x_2)=Z_2(160, 0)=13$. При $x_2=40$ и $\xi_2=\xi_1-x_2=160-40=120$ получим $f_2(40)=6$ (из табл. 1), $Z_3^*(120)=9$ (из табл. 2), откуда $Z_2(160, 40)=6+9=15$ и т. д. После заполнения четвертой секции в 9-м столбце получаем пять чисел: 13, 15, 16, 15 и 15, из которых наибольшее $Z_2^*(160)=16$, а соответствующее

$x_2^*(100)=80$. Эти числа и занесены в основную таблицу, как результаты выполнения условной оптимизации 2-го шага при $\xi_1=160$.

Условную оптимизацию 1-го шага (10, 11 и 12-й столбцы табл. 3) можно было бы выполнить лишь при заданном состоянии $\xi_0=200$ (последняя секция табл. 3). Однако, имея в виду последующий анализ, мы приводим расчеты для всех возможных значений ξ_0 (т. е. для 40, 80, 120, 160 и 200).

Перейдем ко второму этапу расчета — безусловной оптимизации. Из 1-го (последнего по порядку действий) шага условной оптимизации получаем $Z_1^*(200)=24$, т. е. максимальный доход, который может быть достигнут, равен 24. Здесь же получаем $x_1^*(200)=x_1^*=40$, т. е. предприятию I следует выделить 40 млн. руб.

Дальнейшие (безусловные) оптимальные управления определяем из табл. 2 по следующей цепочке. При $x_1^*=40$ из уравнения состояния получаем $\xi_1^*=200-40=160$. В соответствующем (7-м) столбце табл. 2 получаем $x_2^*(160)=80=x_2^*$. Вычисляем $\xi_2^*=160-80=80$ (остаток средств перед выделением предприятию III). В 5-м столбце табл. 2 находим $x_3^*=x_3^*(80)=40$. Тогда $\xi_3^*=\xi_2^*-x_3^*=80-40=40$. Наконец, из 3-го столбца табл. 2 получаем $x_4^*=x_4^*(40)=40$.

Итак, максимальный доход, равный 24 млн. руб., будет получен, если распределять средства между предприятиями следующим образом: предприятию I выделить $x_1^*=40$ млн. руб., предприятию II — $x_2^*=80$ млн. руб., предприятию III — $x_3^*=40$ млн. руб., предприятию IV — $x_4^*=40$ млн. руб.

З а м е ч а н и е 1. Как мы видели, основную сложность при решении задачи составляет первый этап. Что касается безусловной оптимизации, то она в основном связана с последовательным решением уравнений состояния и поэтому в вычислительном плане не вызывает особых затруднений.

З а м е ч а н и е 2. Если бы дискретный характер задачи не диктовался ее условиями, то дискретность можно было бы ввести искусственно, выбрав шаг изменения переменных управления x_k и сохранив в остальном приведенную расчетную схему. Этот шаг можно было бы выбрать исходя из требуемой точности расчетов и условий задания функций $f_k(x_k)$, имея в виду необходимость интерполирования в табл. 1.

Замечание 3. Вычислительная схема, по существу, дает решение не одной задачи, а множества задач с любыми значениями ξ_0 от 0 до 200. Для этого достаточно было рассчитать полностью 10, 11 и 12-й столбцы табл. 3. В результате мы получили бы не единственное значение $Z_1^*(200)$, а функцию $Z_{\max}=Z_1^*(\xi_0)$, которую можно использовать для исследования чувствительности $Z_{\max}$ к вариации исходного параметра ξ_0 (например, определить $\Delta Z_{\max}/\Delta\xi_0$).

Если начальная сумма уменьшилась (например, $\xi_0=160$), то, используя четвертую секцию табл. 3 (столбцы 10—12), мы аналогично получим $Z_{\max}=Z_1^*(160)=23$, $x^*=x_1^*\ (160)=40$, а выполнив безусловную оптимизацию в той же табл. 2, получим $U^*=(40, 80, 0, 40)$. При увеличении ξ_0, например до величины 240, необходимо на каждом шаге в табл. 3 добавить еще одну секцию, соответствующую $\xi_0=240$, и результат условной оптимизации поместить в дополнительной строке в табл. 2. Таким образом, вариация ξ_0 не требует пересчета всей задачи заново, а лишь некоторых добавлений к уже приведенным вычислениям.

Замечание 4. Модель ДП позволяет также без пересчета всей задачи учесть изменение числа шагов n. Сказанное заслуживает более подробного рассмотрения. Пусть дополнительно к данным нашей задачи имеется еще одно предприятие $П_5$ с функцией дохода, заданной табл. 4:

Таблица 4

x	40	80	120	160	200
$f_5(x)$	6	9	12	15	19

Поскольку при первой нумерации шагов, соответствующих номеру предприятия на 4-м шаге, заканчивается распределение средств и условная оптимизация началась с этого шага, достраивать схему вправо, добавляя предприятие V, нельзя: это привело бы к изменению всех расчетов, начиная с последнего 4-го шага. Поэтому достроим схему, располагая новое предприятие слева и снабдив его индексом 0. Теперь нумерация шагов начинается с $k=0$ (нулевого шага), а исходную сумму средств будем обозначать через ξ_{-1}. Суммарный максимальный доход за 5-шаговый процесс составляет $Z_{\max}=Z_0^*(\xi_{-1})$.

Так как условная оптимизация на 1, 2, 3 и 4-м шагах уже выполнена в табл. 3, то осталось достроить таблицу для выполнения условной оптимизации на 0-м шаге, причем только для $\xi_{-1}=200$. Указанные расчеты выполнены в табл. 5. Из оптимизации 0-го шага на этапе безусловной оптимизации получаем $Z_{\max}=Z_0^*(200)=27$. При этом максимум достигается при двух оптимальных управлениях $x_0^*=40$ и $\tilde{x}_0^*=80$. Приняв первый вариант, получаем последовательно $\xi_0^*=\xi_{-1}^*-x_0^*=200-40=160$ и $x_1^*=40$ (из табл. 2). Далее, $\xi_1^*=160-40=120$, из табл. 2 получим $x_2^*=80$ (или 40). Вновь находим $\xi_2^*=120-80=40$ (или $\hat{\xi}_2^*=120-40=80$) и соответственно $x_3^*=0$ (или $\hat{x}_3^*=40$). Наконец, $\xi_3^*=40-0=40$ (или $80-40=40$) и $x_4^*=40$. Таким образом, получаем два альтернативных оптимальных управления $U_1^*=(40, 40, 80, 0, 40)$ и $U_2^*=(40, 40, 40, 40, 40)$. Аналогично, выбирая на 0-м шаге $\tilde{x}_0^*=80$, получаем третье альтернативное оптимальное управление $U_3^*=(80, 40, 40, 0, 40)$.

Таблица 5

			0-й шаг		
ξ_{-1}	x_0	ξ_0	$f_0(x_0)$	$Z_1^*(\xi_0)$	$Z_0(\xi_{-1}, x_0)$
1	2	3	13	14	15
200	0	200	0	24	$0+24=24$
	$\underline{40}$	100	6	21	$6+21=\underline{27}$
	$\underline{80}$	120	9	18	$9+18=\underline{27}$
	120	80	12	14	$12+14=26$
	160	40	15	8	$15+8=23$
	200	0	19	0	$19+0=19$

Таким образом, вычислительный процесс ДП оказывается гибким и удобно приспосабливается к изменению исходных данных (величин ξ_0 и n) без перестройки всех ранее выполненных расчетов.

§ 5. Общее описание процесса моделирования и построения вычислительной схемы динамического программирования

Рассмотрев в двух предыдущих параграфах метод ДП на конкретных примерах, приведем описание вычислительной схемы в общем случае.

Повторим постановку задачи, сформулированной в § 1. Требуется определить допустимое управление U некоторой системой, переводящее ее из начального состояния $\xi_0 \in \Omega_0$ в конечное состояние $\xi_n \in \Omega_n$, при котором показатель эффективности (целевая функция) $Z=\Phi(\xi_0, U)$ достигает наибольшего или наименьшего значения.

Каким же условиям должна удовлетворять общая задача оптимизации, чтобы ее можно было описать моделью ДП? Эти условия таковы:

1. Задача может интерпретироваться как n-шаговый процесс управления, а показатель эффективности процесса может быть представлен в аддитивной форме, т. е. как сумма показателей эффективности на каждом шаге.

2. Структура задачи инвариантна относительно числа шагов n, т. е. должна быть определена для любого n и не зависеть от этого числа.

3. На каждом шаге состояние системы определяется конечным числом s параметров состояния и управляется конечным числом r переменных управления, причем s и r не зависят от числа шагов n.

4. Выбор управления на k-м шаге не влияет на предшествующие шаги, а состояние в начале этого шага есть функция только предшествующего состояния и выбранного на нем управления (отсутствие последействия).

Заметим, что выполнение указанных условий иногда оказывается очевидным, а иногда достигается после соответствующих преобразований. Так, в § 1 указано, как может быть преобразован мультипликативный показатель эффективности в аддитивный. Иногда **наличие** последействия может быть преодолено введением дополнительного параметра состояния. Так, например, если доход на k-м шаге в задаче 1 зависит не только от выделяемых средств x_k и остатка к началу шага ξ_{k-1}, но и от некоторой величины y_{k-1}, зависящей от предыдущего периода, то $\xi_k=F(\xi_{k-1}, x_k, y_{k-1})$. В таком случае будем характеризовать состояние системы после $(k-1)$-го шага двумя параметрами состояния ξ_{k-1} и $\eta_{k-1}=y_{k-1}$.

То же замечание касается разбиения процесса на отдельные шаги, которое иногда естественно вытекает из свойств процесса, а иногда вводится искусственно. Все это говорит о том, что формулировка задачи в форме модели ДП иногда требует применения искусственных приемов. С некоторыми из них мы познакомимся в следующих главах.

Построение модели ДП сводится к следующим основным моментам:

1) выбирают способ деления процесса на шаги;

2) вводят параметры состояния $\bar{\xi}_k=(\bar{\xi}_k^{(1)}, \bar{\xi}_k^{(2)},\ldots, \bar{\xi}_k^{(s)})$ и переменные управления $\bar{u}_k=(\bar{u}_k^{(1)}, \bar{u}_k^{(2)},\ldots, \bar{u}_k^{(s)})$ на каждом шаге процесса*;

3) записывают уравнение состояния

$$\xi_k=F(\xi_{k-1}, u_k); \tag{1.15}$$

4) вводят показатели эффективности на k-м шаге $f_k(\xi_{k-1}, u_k)$ и суммарный показатель — целевую функцию

$$Z=\sum_{k=1}^{n} f_k(\xi_{k-1}, u_k); \tag{1.16}$$

5) вводят в рассмотрение условные максимумы $Z_k^*(\xi_{k-1})$ показателя эффективности от k-го шага (включительно) до конца процесса и условные оптимальные управления на k-м шаге $u_k^*(\xi_{k-1})$;

6) из ограничений задачи определяют для каждого шага множества D_k допустимых управлений на этом шаге;

7) записывают основные для вычислительной схемы ДП функциональные уравнения Беллмана

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{u_k\in D_k}\{f_k(\xi_{k-1}, u_k)+Z_{k+1}^*(\xi_k)\} \tag{1.17}$$

и

$$Z_n^*(\xi_{n-1})=\max_{u_n\in D_n}\{f_n(\xi_{n-1}, u_n)\}. \tag{1.18}$$

Несмотря на единообразие в общем построении модели ДП, приведенном выше, вычислительная схема

---

* Для простоты будем в дальнейшем полагать задачу одномерной и соответственно состояние и уравнение записывать без черты сверху.

строится в зависимости от размерности задачи, характера модели (дискретной или непрерывной), вида функций (1.15), (1.16) и других характеристик модели. При всем разнообразии вычислительных схем ДП можно отметить в них некоторые общие черты.

1. Решение уравнений (1.17) проводят последовательно, начиная с (1.18). Этот этап получил название условной оптимизации.

2. В результате последовательного решения n частных задач на условный максимум определяют две последовательности функций: $\{Z_k^*(\xi_{k-1})\}$ — условные максимумы и соответствующие им $\{u_k^*(\xi_{k-1})\}$ — условные оптимальные управления.

3. Указанные последовательности функций в дискретных задачах получают в табличной форме, а в непрерывных моделях их можно получить аналитически.

4. После выполнения первого этапа (условной оптимизации) приступают ко второму этапу — безусловной оптимизации.

а) Если начальное состояние ξ_0^* задано ($\xi_0=\xi_0^*$), то непосредственно определяют максимум целевой функции

$$Z_{\max}=Z_1^*(\xi_0^*), \tag{1.19}$$

а затем — искомое безусловное оптимальное управление по цепочке

$$\xi_0^* \rightarrow u_1^* \dashrightarrow \xi_1^* \rightarrow u_2^* \dashrightarrow \xi_2^* \rightarrow \ldots \rightarrow u_n^* \dashrightarrow \xi_n^*. \tag{1.20}$$

В этой цепочке переход, указанный сплошной линией, проводят по последовательности $\{u_k^*(\xi_{k-1})\}$, а пунктирной — с помощью уравнений состояний.

б) Если задано множество Ω_0 начальных состояний, $\xi_0 \in \Omega_0$, то дополнительно решают еще одну задачу на максимум:

$$Z_{\max}=\max_{\xi_0 \in \Omega_0}\{Z_1^*(\xi_0)\}, \tag{1.21}$$

откуда находят ξ_0^*, а затем, как и в п. а), по цепочке (1.20) — безусловное оптимальное управление.

Иногда на этапе условной оптимизации вычислительный процесс удобно строить в направлении, обратном описанному выше, т. е. от 1-го шага к n-му. Этот способ получил название *прямого хода* вычислений в отличие от вышеизложенного, который называется *обратным хо-*

дом. Уравнения состояний для прямого хода удобно записывать в виде

$$\xi_{k-1}=T_k(\xi_k,\ u_k) \quad (k=1,\ldots,\ n). \tag{1.22}$$

Они могут быть получены решением уравнений (1.1) относительно ξ_{k-1}. Введем в рассмотрение условные максимумы показателя эффективности за k шагов, от 1-го до k-го включительно — величины $Z_k^*(\xi_k)$. Повторив рассуждения § 2, придем к следующей форме уравнений Беллмана:

$$Z_k^*(\xi_k)=\max_{u_k \in D_k}\{f_k(\xi_k,\ u_k)+Z_{k-1}^*(\xi_{k-1})\} \ (k=2,\ldots,\ n); \tag{1.23}$$

$$Z_1^*(\xi_1)=\max_{u_1 \in D_1}\{f_1(\xi_1,\ u_1)\}. \tag{1.24}$$

В результате решения этих уравнений получим последовательности

$$Z_1^*(\xi_1),\ Z_2^*(\xi_2),\ldots,\ Z_n^*(\xi_n);\ u_1^*(\xi_1),\ u_2^*(\xi_2),\ldots,\ u_n^*(\xi_n). \tag{1.25}$$

Этап безусловной оптимизации не отличается принципиально от аналогичного этапа в обратном ходе вычислений: $Z_{\max}=Z_n^*(\xi_n^*)$, если $\xi_n=\xi_n^*$ задано, или

$$Z_{\max}=\max_{\xi_n \in \Omega_n}\{Z_n^*(\xi_n)\}, \tag{1.26}$$

если указано множество Ω_n возможных конечных состояний. Далее, определяем безусловное оптимальное управление по цепочке

$$\xi_n^* \to u_n^* \text{———}\to \ldots \text{— —}\to \xi_{k-1}^* \to u_{k-1}^* \text{— —}\to \ldots$$

$$\ldots \text{— —}\to \xi_1^* \to u_1^* \text{— —}\to \xi_0^*. \tag{1.27}$$

Ниже, в гл. III, будет подробно рассмотрено построение расчетов по этой схеме.

С точки зрения объема вычислений обе схемы равноценны, но при некоторых дополнительных исследованиях предпочтительнее становится та или другая. Так, например, добавление новых шагов удобнее проводить при использовании прямого хода вычислений, для исследования чувствительности к вариациям ξ_0 более удобен обратный ход, к вариациям ξ_n — прямой ход и т. д.

Приведенное общее описание вычислительной схемы ДП носит несколько абстрактный характер. В последующих главах при рассмотрении различных задач мы вложим в эту схему конкретное содержание и остановимся подробнее на организации вычислений.

В заключение сделаем некоторые общие замечания.

1. По существу, оба варианта вычислительного процесса являются конкретными реализациями более общей трактовки пошаговой оптимизации. Вместо исходной конкретной задачи с определенным заранее числом шагов n и фиксированным значением начального состояния ξ_0 будем рассматривать последовательность аналогичных задач для любого n и любых ξ: одношаговую, двухшаговую, ..., n-шаговую задачи. Вначале решается одношаговая задача оптимизации и получается максимум показателя эффективности $Z_1^*(\xi)$. Затем решается двухшаговая задача, которая получается добавлением к предыдущей еще одного шага [получаем $Z_2^*(\xi)$], и т. д. Шаги можно наращивать в этой последовательности задач как в направлении к началу процесса, так и к его концу. Сохраним индекс k для нумерации шагов от начального к конечному состоянию системы и введем индекс i, указывающий количество шагов в i-шаговой задаче, независимо от вычислительной схемы прямого хода (здесь $i=k$) или в схеме обратного хода (здесь $i=n-k+1$). Этим индексом i будем нумеровать вновь добавленный шаг при переходе от $(i-1)$-шаговой задачи к i-шаговой. Соответствующее управление на этом шаге обозначим через u_i. Обозначим, далее, состояние в конце $(i-1)$-шаговой задачи через ξ, а в конце i-шаговой — через ξ'. Тогда уравнение состояния запишется в виде

$$\xi'=F(\xi,\ u_i). \tag{1.28}$$

Условные максимумы и условные оптимальные управления обозначим соответственно через $Z_i^*(\xi)$ и $u_i^*(\xi)$. Уравнение Беллмана примет вид

$$Z_i^*(\xi)=\max_{u_i\in D_i}\{f_i(\xi,\ u_i)+Z_{i-1}^*(\xi')\}, \tag{1.29}$$

причем предполагается, что $Z_0^*(\xi')=0$ для всех ξ'.

Из равенств (1.28) и (1.29) можно получить соотношения для прямого и обратного хода вычислительных схем при надлежащей интерпретации индекса i ($i=k$ или $i=n-k+1$).

2. Идея и методы ДП более приспособлены к рассмотрению дискретных задач. Лишь в редких случаях уда-

ется получить аналитическое решение уравнений Беллмана. Однако такое аналитическое решение оказывается полезным в теоретическом анализе, в частности, при выявлении структуры оптимального решения.

3. Основным достоинством методов ДП является их применимость при любом способе задания целевой функции (аналитическом или табличном) и любом допустимом множестве значений ξ и u (непрерывном или дискретном). Этого преимущества лишены классические методы оптимизации и другие вычислительные методы математического программирования.

4. Хотя вычислительные методы ДП в дискретном случае и связаны с табулированием функций $Z_k^*(\xi)$ и $u_k^*(\xi)$ для всех возможных значений параметра ξ, но объем расчетов для этих методов значительно меньше, чем при прямом переборе вариантов. Это связано с тем, что на этапе условной оптимизации неудачные варианты сразу отбрасываются и сохраняются лишь условно оптимальные на данном шаге.

5. Трудоемкость решения задачи ДП определяется главным образом размерностью задачи, определяемой числами s и r (соответственно числом параметров состояния на каждом шаге и числом переменных управления на данном шаге). Эти числа взаимосвязаны, т. е. задачи одномерные по s и многомерные по r могут быть преобразованы в одномерные по r и многомерные по s. Поэтому размерность задачи можно условно характеризовать произведением $r \cdot s$. Имея в виду проведение числовых расчетов вручную, мы в дальнейшем преимущественно будем рассматривать одномерные задачи ($s=1$, $r=1$). Вообще говоря, даже при реализации решения на ЭВМ методы ДП практически осуществимы лишь для задач небольшой размерности из-за ограничений емкости оперативной памяти и относительно небольших скоростей записи и считывания чисел.

6. Большим достоинством методов ДП является возможность анализа чувствительности к изменению исходных данных ξ_0 и n (см. замечания 3 и 4 в § 4). Как отмечалось в замечании 1, фактически решается не одна задача, а множество задач для различных ξ и различных n. Поэтому при изменении этих данных можно не решать задачу заново, а сделать лишь несложные добавления к уже выполненным расчетам, как это показано в конце § 4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дать общую формулировку задачи оптимизации в форме модели динамического программирования.
2. Каким условиям должна удовлетворять задача оптимизации, чтобы ее можно было описать моделью ДП?
3. Как понимать многомерность состояния и управления на k-м шаге?
4. Что означает требование отсутствия последействия?
5. Что выражают уравнения состояния и как они записываются?
6. Охарактеризовать содержание показателя эффективности и привести примеры.
7. Как понимать условие аддитивности показателя эффективности?
8. Перечислить основные этапы составления модели ДП.
9. Сформулировать принцип оптимальности и объяснить, как используется этот принцип при записи уравнений Беллмана.
10. Разъяснить на схеме смысл обозначений $Z_k^*(\xi_{k-1})$ и $u_k^*(\xi_{k-1})$.
11. Изложить общую вычислительную схему ДП, разъяснив содержание первого и второго этапов для обратного и прямого хода процессов вычисления.
12. Почему нельзя решать локальную задачу оптимизации на каждом шаге независимо? Пояснить это на примере задачи 1.
13. Каковы достоинства метода ДП по сравнению с известными вам методами оптимизации?
14. Записать уравнения состояния и уравнения Беллмана для прямого хода процесса вычислений. Разъяснить содержание этих уравнений в терминах задачи 1.
15. Объяснить схему применения к задаче 1 метода Лагранжа.
16. Что такое допустимое управление? Разъяснить это понятие на примере задачи 1.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривается выделение средств ξ_0 одному предприятию в течение четырех промежутков времени. Заданы функции дохода $f_k(u_k)$, характеризующие доход в k-м промежутке в зависимости от выделенных средств u_k. Составить модель ДП, объяснив в терминах задачи все вводимые понятия и обозначения. Сравнить полученную модель с моделью задачи 2. Решить задачу, используя значения $f_k(u_k)$ и ξ_0, данные в задаче 2.

2. Найти оптимальное распределение средств между предприятиями $П_2$, $П_3$ и $П_4$ в задаче 2.

3. Найти оптимальное распределение средств между предприятиями $П_1$, $П_2$ и $П_3$ в задаче 2.

4. Перестроить модель задачи 2 для прямого хода процесса и решить задачу.

5. Пусть в упр. 1 50% полученного дохода используется как дополнительный источник финансирования в следующем периоде. Записать соответствующую модель.

6. Пусть в задаче 2 начальные средства изменились на величину $\Delta\xi_0$. Найти соответствующее оптимальное распределение при: а) $\Delta\xi_0=-80$; б) $\Delta\xi_0=40$; в) $\Delta\xi_0=80$.

7. Решить задачу 2 при условии, что в распределении средств ξ_0 участвуют 6 предприятий, причем функции дохода для $П_5$ и $П_6$ заданы в таблице:

x	40	80	120	160	200
$f_5(x)$	7	8	11	11	11
$f_6(x)$	5	9	12	13	13

ГЛАВА II

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ

§ 1. Постановка задачи

Класс задач, рассматриваемый в данной главе, имеет многочисленные практические приложения.

В общем виде эти задачи могут быть описаны следующим образом. Имеется некоторое количество ресурсов, под которыми можно понимать денежные средства, материальные ресурсы (например, сырье, полуфабрикаты, трудовые ресурсы, различные виды оборудования и т. п.). Эти ресурсы необходимо распределить между различными объектами их использования по отдельным промежуткам планового периода или по различным промежуткам по различным объектам так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения. Показателем эффективности может служить, например, прибыль, товарная продукция, фондоотдача (задачи максимизации) или суммарные затраты, себестоимость, время выполнения данного объема работ и т. п. (задачи минимизации).

Вообще говоря, подавляющее число задач математического программирования вписывается в общую постановку задачи оптимального распределения ресурсов. Естественно, что при рассмотрении моделей и вычислительных схем решения подобных задач методом ДП необходимо конкретизировать общую форму задачи распределения ресурсов. В данной главе рассматриваются некоторые конкретные задачи распределения ресурсов, примерами которых были задачи § 3 и 4 предыдущей главы.

В дальнейшем будем предполагать, что условия, необходимые для построения модели ДП, в задаче выполняются. Опишем типичную задачу распределения ресурсов в общем виде.

Задача 1. Имеется начальное количество средств ξ_0, которое необходимо распределить в течение n лет между s предприятиями. Средства u_{ki} ($k=1, 2, \ldots, n$; $i=1, \ldots, s$), выделенные в k-м году i-му предприятию, приносят доход в размере $f_{ki}(u_{ki})$ и к концу года возвращаются в количестве $\varphi_{ki}(u_{ki})$. В последующем распределении доход может либо участвовать (частично или полностью), либо не участвовать.

Требуется определить такой способ распределения ресурсов (количество средств, выделяемых каждому предприятию в каждом плановом году), чтобы суммарный доход от s предприятий за n лет был максимальным.

Следовательно, в качестве показателя эффективности процесса распределения ресурсов за n лет принимается суммарный доход, полученный от s предприятий:

$$Z=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} f_{ki}(u_{ki}). \tag{2.1}$$

Количество ресурсов в начале k-го года будем характеризовать величиной ξ_{k-1} (параметр состояния). Управление на k-м шаге состоит в выборе переменных u_{k1}, $u_{k2}, \ldots, u_{ks}$, обозначающих ресурсы, выделяемые в k-м году i-му предприятию.

Если предположить, что доход в дальнейшем распределении не участвует, то уравнение состояния процесса имеет вид

$$\xi_k=\xi_{k-1}-\sum_{i=1}^{s} u_{ki}+\sum_{i=1}^{s}\varphi_{ki}(u_{ki}). \tag{2.2}$$

Если же некоторая часть дохода участвует в дальнейшем распределении в каком-нибудь году, то к правой части равенства (2.2) прибавляется соответствующая величина.

Требуется определить ns неотрицательных переменных u_{ki}, удовлетворяющих условиям (2.2) и максимизирующих функцию (2.1).

Вычислительная процедура ДП начинается с введения функции $Z_k^*(\xi_{k-1})$, обозначающей доход, полученный за $n-k+1$ лет, начиная с k-го года до конца рассматриваемого периода, при оптимальном распределении средств между s предприятиями, если в k-м году распределялось ξ_{k-1} средств. Функции $Z_k^*(\xi_{k-1})$ для $k=1, 2, \ldots$

..., $n-1$ удовлетворяют функциональным уравнениям (1.5), которые запишутся в виде

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{s} u_{ki} \leqslant \xi_{k-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{s} f_{ki}(\xi_{k-1}, u_{ki}) + Z_{k+1}^*(\xi_k) \right\}. \quad (2.3)$$

При $k=n$ согласно (1.5) получаем

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{0 \leqslant \sum\limits_{i} u_{ni} \leqslant \xi_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{s} f_{ni}(u_{ni}) \right\}. \quad (2.4)$$

Далее необходимо последовательно решить уравнения (2.4) и (2.3) для всех возможных ξ_k ($k=n-1$, $n-2$, ..., 1). Каждое из этих уравнений представляет собой задачу на оптимизацию функции, зависящей от s переменных. Таким образом, задача с ns переменными сведена к последовательности n задач, каждая из которых содержит s переменных. В этой общей постановке задача по-прежнему сложна (из-за многомерности) и упростить ее, рассматривая как ns-шаговую задачу, в данном случае нельзя. В самом деле, попробуем это сделать. Пронумеруем шаги по номерам предприятий сначала в 1-м году, затем во 2-м и т. д.:

$$\underbrace{\ldots (k-1)s+1,\ (k-1)s+2, \ldots,\ ks;}_{k\text{-й год}}$$

$$\underbrace{ks+1,\ ks+2, \ldots,\ (k+1)s; \ldots}_{(k+1)\text{-й год}}$$

и будем пользоваться одним параметром ξ для характеристики остатка средств.

В течение k-го года состояние ξ' к началу любого шага $s(k-1)+i$ ($i=1, 2, ..., s$) определится по предыдущему состоянию ξ с помощью простого уравнения $\xi' = \xi - u_{s(k-1)+i-1}$. Однако по истечении года, т. е. к началу следующего года, к наличным средствам необходимо будет добавить $\sum\limits_{i=1}^{s} \varphi_{ki}(u_{ki})$ средств и, следовательно, состояние ξ' в начале $(ks+1)$-го шага будет зависеть не только от предшествующего ks-го состояния, но и от всех s состояний и управлений за прошлый год. В результате мы получим процесс с последействием. Чтобы исключить последействие, приходится вводить несколько параметров состояний; задача на каждом шаге остается по-прежнему сложной из-за многомерности.

В следующих параграфах мы рассмотрим несколько частных случаев поставленной общей задачи.

§ 2. Двумерная модель распределения ресурсов

Задача 2. Планируется деятельность двух предприятий ($s=2$) в течение n лет. Начальные средства составляют ξ_0. Средства x, вложенные в предприятие I, приносят к концу года доход $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)<x$; аналогично, средства x, вложенные в предприятие II, дают доход $f_2(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_2(x)<x$. По истечении года все оставшиеся средства заново перераспределяются между предприятиями I и II, новых средств не поступает и доход в производство не вкладывается.

Требуется найти оптимальный способ распределения имеющихся средств.

Будем рассматривать процесс распределения средств как n-шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года. Управляемая система — два предприятия с вложенными в них средствами. Система характеризуется одним параметром состояния ξ_{k-1} ($k=1, ..., n$) — количеством средств, которые следует перераспределить в начале k-го года. Переменных управления на каждом шаге две: x_{k1} и x_{k2} — количество средств, выделенных соответственно предприятию I и II. Так как средства ежегодно перераспределяются полностью, то $x_{k2}=\xi_{k-1}-x_{k1}$ ($k=1, ..., n$). Для каждого шага задача становится одномерной. Обозначим x_{k1} через x_k, тогда $x_{k2}=\xi_{k-1}-x_k$.

Показатель эффективности k-го шага равен $f_1(x_k)+$ $+f_2(\xi_{k-1}-x_k)$. Это — доход, полученный от двух предприятий в течение k-го года.

Показатель эффективности задачи — доход, полученный от двух предприятий в течение n лет — составляет

$$Z=\sum_{k=1}^{n}[f_1(x_k)+f_2(\xi_{k-1}-x_k)]. \tag{2.5}$$

Уравнение состояния выражает остаток средств ξ_k после k-го шага и имеет вид

$$\xi_k=\varphi_1(x_k)+\varphi_2(\xi_{k-1}-x_k). \tag{2.6}$$

Пусть $Z_k^*(\xi_{k-1})$ — условный оптимальный доход, полученный от распределения средств ξ_{k-1} между двумя предприятиями за $n-k+1$ лет, начиная с k-го года до конца рассматриваемого периода. Запишем рекуррентные соотношения для этих функций:

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{0<x_n<\xi_{n-1}} \{f_1(x_n) + f_2(\xi_{n-1} - x_n)\};$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0<x_k<\xi_{k-1}} \{f_1(x_k) + f_2(\xi_{k-1} - x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\}, \tag{2.7}$$

где ξ_k — определяется из уравнения состояния (2.6).

Рассмотрим решение задачи при конкретных значениях параметров.

Задача 3. Решить задачу 2 при следующих условиях: $\xi_0 = 10000$; $n=4$; $f_1(x) = 0{,}4x$; $f_2(x) = 0{,}3x$; $\varphi_1(x) = 0{,}5x$; $\varphi_2(x) = 0{,}8x$.

Если x_k и $\xi_{k-1} - x_k$ — средства, выделенные соответственно предприятиям I и II в k-м году, то суммарный доход, полученный в этом году от обоих предприятий, равен

$$Z_k = 0{,}4x_k + 0{,}3\xi_{k-1} - 0{,}3x_k = 0{,}1x_k + 0{,}3\xi_{k-1},$$

а уравнение состояния (2.6) принимает вид

$$\xi_k = 0{,}5x_k + 0{,}8(\xi_{k-1} - x_k) = 0{,}8\xi_{k-1} - 0{,}3x_k.$$

Основные функциональные уравнения (2.7) запишутся следующим образом:

$$Z_4^*(\xi_3) = \max_{0<x_4<\xi_3} \{0{,}1x_4 + 0{,}3\xi_3\};$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0<x_k<\xi_{k-1}} \{0{,}1x_k + 0{,}3\xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0{,}8\xi_{k-1} - 0{,}3x_k)\}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3).$$

Проведем этап условной оптимизации.

4-й шаг. Условный оптимальный доход равен

$$Z_4^*(\xi_3) = \max_{0<x_4<\xi_3} \{0{,}1\,x_4 + 0{,}3\,\xi_3\} = 0{,}4\xi_3,$$

так как линейная относительно x_4 функция достигает максимума в конце интервала, т. е. при $x_4^*(\xi_3) = \xi_3$.

3-й шаг:

$$Z_3^*(\xi_2) = \max_{0<x_3<\xi_2} \{0{,}1x_3 + 0{,}3\xi_2 + 0{,}4(0{,}8\xi_2 - 0{,}3x_3)\} = \max_{0<x_3<\xi_2} \{-0{,}02x_3 + 0{,}63\xi_2\}.$$

Коэффициент при x_3 отрицателен, поэтому максимум этой линейной относительно x_3 функции достигается в начале интервала, т. е. $x_3^*(\xi_2)=0$; $Z_3^*(\xi_2)=0{,}62\xi_2$.

2-й шаг:

$$Z_2^*(\xi_1)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant \xi_1}\{-0{,}086x_2+0{,}796\xi_1\},$$

откуда $x_2^*(\xi_1)=0$; $Z_2^*(\xi_1)=0{,}796\xi_1$.

1-й шаг:

$$Z_1^*(\xi_0)=\max\{-0{,}1388x_1+0{,}9368\xi_0\}=0{,}9368\xi_0$$

при $x_1^*(\xi_0)=0$.

Результат условной оптимизации:

$$Z_1^*(\xi_0)=0{,}9368\xi_0;\ x_1^*(\xi_0)=0;\ Z_2^*(\xi_1)=0{,}796\xi_1;\ x_2^*(\xi_1)=0;$$

$$Z_3^*(\xi_2)=0{,}62\xi_2;\ x_3^*(\xi_2)=0;\ Z_4^*(\xi_3)=0{,}4\xi_3;\ x_4^*(\xi_3)=\xi_3.$$

Перейдем к безусловной оптимизации. Полагаем $\xi_0^*=10000$; тогда $Z_{\max}=9368$, $x_1^*=0$. Зная x_1^*, находим $\xi_1^*=0{,}8\cdot10000—0{,}3\cdot0=8000$; используя ξ_1^*, получаем $x_2^*=0$ и $\xi_2^*=0{,}8\cdot80000=6400$. Аналогично $x_3^*=0$, $\xi_3^*=$ $=5120$. Наконец, $x_4^*=5120$. Следовательно, средства по годам нужно распределить так:

Предприятие	Год			
	1	2	3	4
I	0	0	0	5120
II	10000	8000	6400	0

При таком распределении средств (10000 руб.) за четыре года будет получен доход, равный $Z_{\max}=9368$.

Непрерывные модели, примером которых служит задача 3, не являются типичными в практике распределения ресурсов. В дальнейшем большинство задач будет носить дискретный характер.

§ 3. Дискретная динамическая модель оптимального распределения ресурсов

При дискретном вложении ресурсов может возникнуть вопрос о выборе шага Δx в изменении переменных управления. Этот шаг может быть задан (как в задаче 2 гл. I) или определяется исходя из требуемой точности вычислений и точности исходных данных. В общем случае эта задача сложна, требует интерполирования по таблицам $Z^*(\xi)$ на предыдущих шагах вычисления. Иногда предварительный анализ уравнения состояния позволяет выбрать подходящий шаг Δx, а также установить предельные значения ξ, для которых на каждом шаге нужно выполнить табулирование.

Рассмотрим двумерную задачу, аналогичную предыдущей, в которой строится дискретная модель ДП процесса распределения ресурсов.

Задача 3. Составить оптимальный план ежегодного распределения средств между двумя предприятиями в течение трехлетнего планового периода при следующих условиях: 1) начальная сумма составляет 400; 2) вложенные средства в размере x приносят на предприятии I доход $f_1(x)$ и возвращаются в размере 60% от x, а на предприятии II — соответственно $f_2(x)$ и 20%; 3) ежегодно распределяются все наличные средства, получаемые из возвращенных средств: 4) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ заданы в табл. 1:

Таблица 1

$f(x)$ \ x	50	100	150	200	250	300	350	400
$f_1(x)$	6	10	15	26	28	38	45	49
$f_2(x)$	8	12	20	28	35	40	46	48

Модель динамического программирования данной задачи аналогична модели, составленной в задаче 1.

Процесс управления является трехшаговым. Параметр ξ_{k-1} — средства, подлежащие распределению в k-м году ($k=1, 2, 3$). Переменная управления x_k — средства, вложенные в предприятие I в k-м году. Средства, вложенные в предприятие II в k-м году, составляют $\xi_{k-1}-x_k=y_k$. Следовательно, процесс управления на k-м шаге зависит от одного параметра x_k (модель одномерная). Уравнение состояния запишется в виде

$$\xi_k=0{,}6\ x_k+0{,}2\ y_k, \tag{2.8}$$

а функциональные уравнения — в виде

$$Z_n^*(\xi_{n-1})=\max_{0<x_n<\xi_{n-1}}\{f_1(x_n)+f_2(y_n)\}, \qquad (2.9)$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{0<x_k<\xi_{k-1}}\{f_1(x_k)+f_2(y_k)+Z_{k+1}^*(\xi_k)\}. \qquad (2.10)$$

Попытаемся определить максимально возможные значения, для которых необходимо проводить табулирование на k-м шаге ($k=1$, 2, 3). При $\xi_0=400$ из уравнения (2.8) определяем максимально возможное значение ξ_1; имеем $\xi_1=0{,}6\cdot 400=2400$ (все средства вкладываются в предприятие I). Аналогично, для ξ_2 получаем предельное значение $0{,}6\cdot 240=144$. Пусть интервал изменения x_k совпадает с табличным, т. е. $\Delta x=50$. Составим таблицу суммарной прибыли на данном шаге:

$$f_1(x)+f_2(y)=f(x,\ y)$$

(см. табл. 2). Это облегчит дальнейшие расчеты. Так как $x+y=\xi$, то клетки, расположенные по диагонали таблицы, отвечают одному и тому же значению ξ, указанному в 1-й строке (в 1-м столбце) табл. 2. Во 2-й строке таблицы записаны значения $f_1(x)$, а во 2-м столбце — значения $f_2(y)$, взятые из табл. 1. Значения в остальных клетках

Таблица 2

y \ x	0	50	100	150	200	250	300	350	400
0	0	6	10	15	26	28	38	45	49
50	8	14	18	23	34	36	46	53	
100	12	18	22	27	38	40	50		
150	20	26	30	35	46	48			
200	28	34	38	43	54				
250	35	41	45	50					
300	40	46	50						
350	46	52							
400	48								

таблицы получены сложением чисел $f_1(x)$ и $f_2(y)$, стоящих во 2-й строке и во 2-м столбце и соответствующих столбцу и строке, на пересечении которых находится данная клетка. Например, для $\xi=150$ получаем ряд чисел: 20 — для $x=0$, $y=150$; 18 — для $x=50$, $y=100$; 18— для $x=100$, $y=50$; 15 — для $x=150$, $y=0$.

Аналогичную таблицу полезно подготовить и для расчетов по формуле (2.8). Расчет $\xi_k=0{,}6x_k+0{,}2y_k$ приведен в табл. 3.

Таблица 3

y \ x	0	50	100	150	200	250	300	350	400
0	0	30	60	90	120	150	180	210	240
50	10	40	70	100	130	160	190	220	
100	20	50	80	110	140	170	200		
150	30	60	90	120	150	180			
200	40	70	100	130	160				
250	50	80	110	140					
300	60	90	120						
350	70	100							
400	80								

Проведем условную оптимизацию по обычной схеме.

3-й шаг. Основное уравнение (2.9)

$$Z_3^*(\xi_2)=\max_{(x_3,\,y_3)}\{f_1(x_3)+f_2(y_3)\}=\max_{(x_3,\,y_3)}\{f(x_3,\,y_3)\}$$

решим с помощью табл. 2. Как указывалось выше, $\xi_2\leqslant 150$. Просмотрим числа на диагоналях, соответствующих $\xi_2=0$; 50; 100; 150 и на каждой диагонали выберем наибольшее. Это и есть $Z_3^*(\xi_2)$. В 1-й строке находим соответствующее условное оптимальное управление. Данные оптимизации на 3-м шаге поместим в основную таблицу (табл. 4). В ней введен столбец Δx, который в дальнейшем используется при интерполяции.

Оптимизация 2-го шага проведена в табл. 5 согласно уравнению вида (2.10):

$$Z_2^*(\xi_1)=\max_{0<x_2<\xi_1}\{f(x_2,\,y_2)+Z_3^*(\xi_2)\}.$$

Таблица 4 (основная)

ξ	3-й шаг			2-й шаг		
	$Z_3^*(\xi_2)$	ΔZ	$x_3^*(\xi_2)$	$Z_2^*(\xi_1)$	ΔZ	$x_2^*(\xi_1)$
		8			10,8	
50	8		50	10,8		50
		6			9,6	
100	14		50	20,4		50
		6			8,0	
150	20		0	28,4		100
					14	
200				42,4		200
					9,2	
250				51,6		200

Таблица 5

ξ_1	50		100			150			
x_2	0	50	0	50	100	0	50	100	150
y_2	50	0	100	50	0	150	100	50	0
ξ_2	10	30	20	40	60	30	50	70	90
$f(x_2, y_2)$	8	6	12	14	10	20	18	18	15
$Z_3^*(\xi_2)$	1,6	4,8	3,2	6,4	9,2	4,8	8	10,4	12,8
$Z_2(x_2, y_2, \xi_1)$	9,6	10,8	15,2	20,4	19,2	24,8	26	28,4	27,8

Продолжение

ξ_1	200					250					
x_2	0	50	100	150	200	0	50	100	150	200	250
y_2	200	150	100	50	0	250	200	150	100	50	0
ξ_2	40	60	80	100	120	50	70	90	110	130	150
$f(x_2, y_2)$	28	26	22	23	26	35	34	30	27	34	28
$Z_3^*(\xi_2)$	6,4	9,2	11,6	14	16,4	8	10,4	12,8	16,2	17,6	20
$Z_2(x_2, y_2, \xi_1)$	34,4	35,2	33,6	37	42,4	43	44,4	42,8	42,2	51,6	48

Результаты оптимизации занесены в табл. 4. Для значений ξ_2, некратных 50, приведена линейная интерполяция функции $Z_3^*(\xi_2)$ в табл. 4.

Условная оптимизация 1-го шага согласно уравнению

$$Z_1^*(\xi_0)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant \xi_0}\{f(x_1, y_1)+Z_2^*(\xi_1)\}$$

для $\xi_0=400$ приведена во вспомогательной табл. 6. Для значений, некратных 50, соответствующие значения функции $Z_2^*(\xi_1)$ получены интерполяцией в основной табл. 4.

Таблица 6

x_1	0	50	100	150	200	250	300	350	400
y_1	400	350	300	250	200	150	100	50	0
ξ_1	80	100	120	140	160	180	200	220	240
$f(x_1, y_1)$	48	52	50	50	54	48	50	53	49
$Z_2^*(\xi_1)$	16,6	20,4	23,6	27,8	31,2	36,8	42,4	46,1	49,8
$Z_1, (x_1, y_1, \xi_0)$	64,6	72,4	73,6	77,8	85,2	84,8	92,4	99,1	98,8

Перейдем к безусловной оптимизации. Из табл. 6 получаем $Z_{\max}=99{,}1$, $x_1^*=350$, $y_1^*=50$. По x_1^* и y_1^* в табл. 3 находим $\xi_1^*=220$; для этого значения из табл. 4 получаем $x_2^*=200$. Следовательно, $y_2^*=20$. Этому управлению в табл. 3 соответствует $\xi_2^*=124$; для полученного значения ξ_2 из табл. 4 после интерполирования находим $x_3^*=24$ и $y^*_3=100$.

Итак, мы получили следующий оптимальный план распределения средств между двумя предприятиями по годам:

Предприятие	1-й год	2-й год	3-й год
I	350	200	24
II	50	20	100

При этом может быть получен максимальный доход, равный $Z_{\max}=99{,}1$. Прямой подсчет дохода по табл. 2 для найденного оптимального управления дает 97,2. Расхождение в результатах на 1,9 (около 2%) объясняется ошибкой линейной интерполяции.

Мы рассмотрели несколько вариантов задачи оптимального распределения ресурсов. Существуют другие варианты этой задачи, особенности которых учитываются соответствующей динамической моделью. Некоторые виды таких задач даны в упражнениях к настоящей главе.

§ 4. Учет последействия в задачах оптимального распределения ресурсов

При постановке задачи оптимального распределения ресурсов мы предполагали, что доход на каждом шаге от всех предприятий и максимальный доход $Z_k^*(\xi)$, начиная с k-го шага до конца планового периода, зависели только от состояния системы ξ к k-му шагу и от управления $\bar{u}_k=(u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{ks})$ на этом шаге, но не зависели от того, каким образом распределялись средства между предприятиями на предыдущих шагах. Однако во многих задачах оптимального распределения средств доход, полученный на k-м шаге, может оказаться зависимым и от того, какие средства и в каком количестве выделялись каждому из предприятий на предыдущих шагах, т. е. от предыстории процесса.

Таким образом, нарушается одно из условий, предъявляемых к задачам оптимизации, для того чтобы их можно было описать моделью ДП (условие 4, § 5, гл. I). Чтобы учесть предысторию процесса распределения ресурсов, можно, как уже говорилось в § 1 настоящей главы, увеличить число параметров состояния на каждом шаге, искусственно включив в число фазовых координат все управляющие параметры предшествующих шагов, которые определяют последействие. Если число таких параметров велико, то схема ДП усложняется настолько, что становится практически неприменимой. В случае, если размерность искусственного фазового пространства не превышает 3—4, то задачу можно решить вручную или (для большого числа шагов n) на машине.

Рассмотрим модель задачи оптимального распределения ресурсов с последействием, аналогичную задаче 2.

Задача 5. Начальные средства ξ_0 распределяются между двумя предприятиями в течение n лет. Доход, полученный в конце k-го года от предприятий I и II, зависит от средств x_k и y_k, выделенных соответственно в предприятия I и II в k-м году, и от суммы всех вложенных в предприятия I и II средств соответственно за предыдущие $k-1$ лет. От этих же факторов зависит и величина средств, которые возвращаются в конце каждого года и перераспределяются в очередном плановом периоде. Новые средства не поступают, доход в производство не вкладывается.

Требуется найти оптимальный способ распределения ресурсов между предприятиями I и II на n лет.

Обозначим через $f_{k1}\left(x_k, \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right)$, $f_{k2}\left(y_k, \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right)$ $(k=1,\ldots, n)$ функции дохода, а через $\varphi_{k-1}\left(x_k, \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right)$ и $\varphi_{k2}\left(y_k, \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right)$ — функции возврата средств для предприятий I и II соответственно.

Состояние системы ξ_k в конце k-го шага удовлетворяет уравнению

$$\xi_k=\varphi_{k1}\left(x_k, \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right)+\varphi_{k2}\left(y_k, \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right), \qquad (2.11)$$

а доход, полученный на k-м шаге от двух предприятий, равен

$$f_{k1}\left(x_k, \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right)+f_{k2}\left(y_k, \sum_{i=1}^{k-1} y_j\right). \qquad (2.12)$$

Величины (2.11) и (2.12) зависят не только от управления (x_k, y_k) на k-м шаге, но и от всех управлений на предшествующих шагах (процесс распределения ресурсов обладает последействием).

Введем в рассмотрение две новые фазовые координаты:

$$\eta_{k-1}=\sum_{j=1}^{k-1} x_j, \quad \theta_{k-1}=\sum_{j=1}^{k-1} y_j, \qquad (2.13)$$

полагая $\eta_0=\theta_0=0$. Состояние системы к началу k-го шага характеризуется тремя параметрами: ξ_{k-1}, η_{k-1}, θ_{k-1}.

Так как все наличные средства ξ_{k-1} в k-м году полностью распределяются между предприятиями I и II, то $y_k=\xi_{k-1}-x_k$.

Уравнение состояния имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\xi_k=\varphi_{k1}(x_k,\ \eta_{k-1})+\varphi_{k2}(\xi_{k-1}-x_k,\ \theta_{k-1}),\\
&\eta_k=\eta_{k-1}+x_k,\\
&\theta_k=\theta_{k-1}+\xi_{k-1}-x_k,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

а доход на k-м шаге равен

$$
f_{k1}(x_k,\ \eta_{k-1})+f_{k2}(\xi_{k-1}-x_k,\ \theta_{k-1}). \tag{2.15}
$$

Суммарный доход за n лет составляет

$$
Z=\sum_{k=1}^{n}[f_{k1}(x_k,\ \eta_{k-1})+f_{k2}(\xi_{k-1}-x_k,\ \theta_{k-1})]. \tag{2.16}
$$

Требуется найти неотрицательные переменные x_k ($k=1, \ldots, n$), обращающие в максимум функцию (2.16) и удовлетворяющие уравнениям (2.14) при начальных условиях $\xi_0^*=\xi_0, \eta_0^*=0$, $\theta_0^*=0$.

Обозначим через $Z_k^*(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \theta_{k-1})$ условный максимальный доход, полученный за $n-k+1$ шагов, начиная с k-го до n-го включительно, при оптимальном распределении средств ξ_{k-1} на этих шагах.

Функциональные уравнения (1.5) для $Z_k^*(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \theta_{k-1})$ имеют вид

$$
Z_k^*(\xi_{k-1},\ \eta_{k-1},\ \theta_{k-1})=\max_{0\leqslant x_k\leqslant \xi_{k-1}}\{f_{k1}(x_k,\ \eta_{k-1})+
$$

$$
+f_{k2}(\xi_{k-1}-x_k,\ \theta_{k-1})+Z_{k+1}^*(\xi_k,\ \eta_k,\ \theta_k)\}\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n-1);
$$

$$
Z_n^*(\xi_{n-1},\ \eta_{n-1},\ \theta_{n-1})=\max_{0\leqslant x_n\leqslant \xi_{n-1}}\{f_{n1}(x_n,\ \eta_{n-1})+
$$

$$
+f_{n2}(\xi_{n-1}-x_n,\ \theta_{n-1})\}. \tag{2.17}
$$

Решая последовательно уравнения (2.17) для $k=n, n-1, \ldots, 1$, получим, как и выше, две последовательности значений $Z_k^*(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \theta_{k-1})$ и $x_k^*(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \theta_{k-1})$. Далее, при начальных условиях $\xi_0^*=\xi_0$, $\eta_0^*=\theta_0^*=0$, учитывая уравнения состояния (2.14), по цепочке получим оптимальное управление $\overline{X}^*=(x_1^*,\ x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и $\overline{Y}^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$:

$$x_1^*=x_1^*(\xi_0^*,\ 0,\ 0)\quad \begin{cases} \xi_1^*=\varphi_{11}(x_1^*,\ 0)+\varphi_{22}(\xi_0-x_1^*,\ 0)\\ \eta_1^*=x_1^*\\ \theta_1^*=\xi_0-x_1^* \end{cases}$$

$$x_2^*=x_2^*(\xi_1^*,\ \eta_1^*,\ \theta_1^*)$$

$$\begin{cases} \xi_{n-1}^*=\varphi_{n-1,1}(x_{n-1}^*,\ \eta_{n-2}^*)+\varphi_{n-1,2}(\xi_{n-2}^*-x_{n-1}^*,\ \theta_{n-2}^*)\\ \eta_{n-1}^*=\eta_{n-2}^*+x_{n-1}^*.\\ \theta_{n-1}^*=\xi_{n-2}^*-x_{n-1}^*+\theta_{n-2}^* \end{cases}$$

$$x_n^*=x_n^*(\xi_{n-1}^*,\ \eta_{n-1}^*,\ \theta_{n-1}^*).$$

Оптимальное управление $\overline{Y}^*$ получается по формулам $y_k^*=\xi_{k-1}^*-x_k^*\ (k=1,\ 2,\ldots,\ n)$, а соответствующий максимальный доход равен $Z_{\max}=Z_1^*(\xi_0,\ 0,\ 0)$.

Рассмотрим, как реализуется схема ДП, учитывающая предысторию процесса, на следующей дискретной модели оптимального распределения ресурсов.

Задача 6. Средства $\xi_0=6$ распределяются между тремя предприятиями, принадлежащими одному объединению и связанными одним технологическим циклом так, что продукция предприятия I служит полуфабрикатом для предприятия II, и продукция первых двух предприятий служит полуфабрикатом для предприятия III. В табл. 7 заданы функции $f_1(x_1)$, $f_2(x_2,\ x_1)$, $f_3(x_3,\ x_1+x_2)$, характеризующие выпуск продукции в одних и тех же единицах в зависимости от вложенных средств x_1, x_2, x_3 в предприятия I, II, III соответственно. Каждому предприятию можно выделить не более 5 ед. средств, кратных $\Delta x=1$.

Требуется распределить начальные средства ξ_0 между тремя предприятиями так, чтобы максимизировать выпуск продукции.

Запишем модель ДП задачи.

Начальное состояние $\xi_0=6$; номер шага k — номер предприятия ($k=1,\ 2,\ 3$); переменные x_1, x_2, x_3 — средст-

Таблица 7

Предприятия	Продукция	x_1	1	2	3	4	5
I	$f_1(x_1)$		2,1	3,2	4,3	5,1	5,1
		$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4	5
II	$f_2(x_2, x_1)$	0	2,2	2,8	3,1	4,3	6
		1	3,1	4,2	5,3	7,1	8
		2	3,3	4,5	6,1	7,3	—
		3	3,5	4,8	6,7	—	—
		4	5,4	5,9	—	—	—
		$x_1+x_2 \backslash x_3$	1	2	3	4	5
III	$f_3(x_3, x_1+x_2)$	0	3,4	3,8	4,2	5,0	5,0
		1	3,7	4,1	4,5	5,3	5,3
		2	3,7	4,1	4,5	5,4	—
		3	4,0	4,5	4,8	—	—
		4	4,2	4,8	—	—	—
		5	4,6	—	—	—	—
		6	—	—	—	—	—

ва, выделенные предприятиям I, II, III соответственно,— удовлетворяют условиям

$$x_1+x_2+x_3=6;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \quad (2.18)$$

Показатель эффективности — суммарная продукция — равен

$$Z=f_1(x_1)+f_2(x_2, x_1)+f_3(x_3, x_1+x_2). \quad (2.19)$$

Найти переменные x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям (2.18) и обращающие в максимум функцию (2.19).

Будем характеризовать состояние процесса распределения средств в начале k-го шага двумя параметрами: ξ_{k-1} — остатком средств после выделения предыдущим $k-1$ предприятиям; η_{k-1} — количеством средств, вложенных в предыдущее предприятие ($\eta_0=0$).

Уравнения состояний имеют вид

$$\begin{aligned} &\eta_0=0, \\ &\xi_1=\xi_0-x_1,\ \eta_1=x_1 \\ &\xi_2=\xi_1-x_2,\ \eta_2=\eta_1+x_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Пусть $Z_k^*(\xi_{k-1}, \eta_{k-1})$ — условный максимум продукции, выпущенной предприятиями, считая с k-го до конца. Функции $Z_k^*(\xi_{k-1}, \eta_{k-1})$ при $k=3, 2, 1$ удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
&Z_3^*(\xi_2, \eta_2) = \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \{f_3(x_3, \eta_2)\}, \\
&Z_2^*(\xi_1, \eta_1) = \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \{f_2(x_2, \eta_1) + Z_3^*(\xi_2, \eta_2)\}, \qquad (2.21) \\
&Z_1^*(\xi_0, \eta_0) = \max_{0 \le x_1 \le \xi_0} \{f_1(x_1) + Z_2^*(\xi_1, \eta_1)\},
\end{aligned}
$$

Обозначим выражения, стоящие в фигурных скобках второго и третьего уравнений (2.21), соответственно через $Z_2(x_2, \xi_1, \eta_1)$ и $Z_1(x_1, \xi_0, \eta_0)$.

Условная оптимизация 3-го шага сводится к решению первого уравнения из (2.21). Результат ее совпадает с разделом III табл. 7 (здесь $x_1 + x_2 = \eta_2$).

Условная оптимизация 2-го шага проведена в табл. 8, при этом во втором из уравнений (2.21) состояния ξ_2 и η_2 выражены через ξ_1 и η_1 из соотношений (2.20). Условные максимумы для всех ξ_1, η_1 в таблице подчеркнуты. При заполнении табл. 8 использовались разделы II и III табл. 7.

Условная оптимизация 1-го шага проведена в табл. 9 только для $\xi_0=6$. При использовании третьего из уравнений (2.21) ξ_1 и η_1 выражены через ξ_0 и η_0 из соотношений (2.20). При расчетах в табл. 9 использовались раздел I табл. 7 и подчеркнутые значения $Z_2^*(\xi_1, \eta_1)$ табл. 8.

Используя результат условной оптимизации (табл. 9, 8 и раздел III табл. 7), получим оптимальное решение.

Из табл. 9 получаем $Z_{\max}=15{,}1$; это значение достигается при $x_1^*=4$. Отсюда $\xi_1^*=\xi_0-4=2$; $\eta_1^*=x_1^*=4$. Из табл. 8 находим $x_2^*=x_2^*(2, 4)=1$; следовательно, $\xi_2^*=\xi_1^*-1=1$, $\eta_2^*=\eta_1^*+x_2^*=5$. Из раздела III табл. 7 определяем $x_3^*=x_3^*(1{,}5)=1$.

Таким образом, при распределении $\bar{X}^*=(4, 1, 1)$ средств между тремя предприятиями может быть достигнут максимальный выпуск продукции, величина которого равна 15,1 ед.

Таблица 8

ξ_1	x_2	$\xi_2=\xi_1-x_2$	$\eta_1=0$			$\eta_1=1$			$\eta_1=2$			$\eta_1=3$			$\eta_1=4$		
			$f(x_2, 0)$	$Z_3^*(\xi_2, x_2)$	$Z_2(\xi_1, 0)$	$f_2(x_2, 1)$	$Z_3^*(\xi_2, 1+x_2)$	$Z_2(\xi_1, 1)$	$f_2(x_2, 2)$	$Z_3^*(x_2, 2)$	$Z_2(\xi_1, 2)$	$f_2(x_2, 3)$	$Z_3^*(\xi_2, 3+x_2)$	$Z_2(\xi_1, 3)$	$f_2(x_2, 4)$	$Z_3^*(\xi_2, 4+x_2)$	$Z_2(\xi_1, 4)$
0	0	1	0	3,4	3,4	0	3,7	3,7	0	3,7	3,7	0	3,5	3,5	0	4,6	4,6
	1	0	2,2	0	2,2	3,1	0	3,1	3,3	0	5,3	4,0	0	4,0	5,4	0	5,4
2	0	2	0	3,8	38	0	3,8	3,8	0	4,1	4,1	0	4,5	4,5	0	4,8	4,8
	1	1	2,2	3,7	5,9	3,1	3,7	6,8	3,3	4,0	7,3	3,5	4,2	7,7	5,4	4,6	10,0
	2	0	2,8	0	2,8	4,2	0	4,2	4,5	0	4,5	4,8	0	4,8	5,9	0	5,9
3	0	3	0	4,0	4,2	0	4,5	4,5	0	4,5	4,5	0	4,8	4,8			
	1	2	2,2	38	6,0	3,1	4,1	7,2	3,3	4,5	7,8	3,5	4,8	8,3			
	2	1	2,8	3,7	6,5	4,2	4,0	8,2	4,5	4,2	8,7	4,8	4,6	9,4			
	3	0	3,1	0	3,1	5,3	0	5,3	6,1	0	0	6,7	0	6,7			

Продолжение

			$\eta_1=0$			$\eta_1=1$			$\eta_1=2$			$\eta_1=3$			$\eta_1=4$		
ξ_1	x_2	$\xi_2=\xi_1-x_2$	$f(x_2, 0)$	$Z_3^*(\xi_2, x_2)$	$Z_2(\xi_1, 0)$	$f_2(x_2, 1)$	$Z_3^*(\xi_2, 1+x_2)$	$Z_2(\xi_1, 1)$	$f_2(x_2, 2)$	$Z_3^*(x_2, 2)$	$Z_2(\xi_1, 2)$	$f_2(x_2, 3)$	$Z_3^*(\xi_2, 3+x_2)$	$Z_2(\xi_1, 3)$	$f_2(x_2, 4)$	$Z_3^*(\xi_2, 4+x_2)$	$Z_2(\xi_1, 4)$
4	0	4	0	5,0	5,0	0	5,3	5,3	0	5,4	5,4						
	1	3	2,2	4,5	6,7	3,1	4,5	7,6	3,3	4,8	8,1						
	2	2	2,8	4,1	6,9	4,2	4,5	8,7	4,5	4,8	8,4						
	3	1	3,1	4	7,1	5,3	4,2	9,5	6,1	4,6	10,7						
	4	0	4,3	0	4,3	7,1	0	7,1	7,3	0	7,3						
5	0	5	0	5,0	5,0	0	5,3	5,3									
	1	4	2,2	5,3	7,5	3,1	5,4	8,5									
	2	3	2,8	4,5	7,3	4,2	4,8	9,0									
	3	2	3,1	4,5	7,6	5,3	4,8	10,1									
	4	1	4,3	4,2	8,5	7,1	4,6	11,7									
	5	0	6,0	0	6	8	0	8									
6	0	6	0	5,0	5,0												
	1	5	2,2	5,3	7,5												
	2	4	2,8	5,4	8,2												
	3	3	3,1	4,8	7,9												
	4	2	4,3	4,8	9,1												
	5	1	6	4,6	10,6												
	6	0	6	0	6												

Таблица 9

x_1	$\xi_1=6-x_1$	$\eta_1=x_1$	$f_1(x_1)$	$Z_2^*(\xi_1, \eta_1)$	$Z_1(\xi_0, \eta_0)$
0	6	0	0	10,6	10,6
1	5	1	2,1	11,7	13,8
2	4	2	3,2	10,7	13,9
3	3	3	4,3	9,4	13,7
4	2	4	5,1	10	<u>15,1</u>
5	1	5	5,1	5,4	10,5

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить модель ДП в задаче распределения ресурсов, аналогичной задаче 2, если функции дохода $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и функции траты $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ изменяются от шага к шагу. Для k-го шага они равны соответственно $f_{k1}(x)$, $\varphi_{k1}(x)$, $f_{k2}(x)$, $\varphi_{k2}(x)$. Записать все нужные формулы, описать расчетную процедуру.

2. Имеется одно предприятие и начальный запас средств ξ_0, которые можно вкладывать в предприятие не целиком, а частично резервировать. Средства x, вложенные на k-м шаге, дают прибыль $f_k(x)$ и уменьшаются до $\varphi_k(x)$. Требуется наилучшим образом распределить имеющиеся и оставшиеся средства на n лет, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Наметить схему решения задачи методом ДП, написать все нужные формулы, описать расчетную процедуру в следующих случаях: 1) вложенные средства расходуются неполностью; 2) вложенные средства расходуются целиком, $\varphi_k(x)=0$; 3) все функции прибыли одинаковы: $f_k(x)=f(x)$, а все вложенные средства расходуются целиком: $\varphi_k(x)=0$.

3. Наметить схему решения задачи, аналогичной задаче 2, методом ДП для случая $s=3$, $f_{ki}(x)=f_i(x)$, $\varphi_{ki}(x)=\varphi_i(x)$ (т. е. функции прибыли и траты одинаковы для каждого года).

4. Наметить схему решения задачи, аналогичной задаче 5, при условии, что годовой доход делится на две части: $p\%$ отчисляется в госбюджет, остальные средства прибавляют к оставшимся после очередного года и перераспределяются между отраслями I и II.

5. Имеются две отрасли производства: отрасль I производит машины, отрасль II — средства потребления. Планирование ведется на отрезок времени n лет. В начале периода планирования запас денежных средств равен ξ_0, а запас машин s_0 (все машины должны быть использованы). Машины, произведенные в отрасли I, могут использоваться в начале следующего хозяйственного года как в самой отрасли I, так и в отрасли II. Средства, вложенные в каждую отрасль, расходуются полностью и перераспределению не подлежат. Требуется распределить имеющиеся средства так, чтобы сумма произведенных за весь период средств потребления достигала максимума.

Ввести самостоятельно функции, знание которых необходимо для решения задачи. Наметить схему решения задачи методом ДП.

6. Найти оптимальное распределение девяти механизмов между тремя видами земляных работ, если суммарная производительность (в тыс. м^3) задана в таблице:

Виды работ \ Число механизмов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	5	9	12	14	15	18	20	24	27
II	7	9	11	13	16	19	21	22	25
III	6	10	13	15	16	18	21	22	25

7. Решить ту же задачу при наличии двенадцати механизмов и дополнительных данных о производительности:

Виды работ \ Число механизмов	10	11	12
I	30	34	38
II	28	35	40
III	26	29	33

8. Распределить имеющиеся ресурсы в размере 250 тыс. руб. между четырьмя предприятиями, если увеличение выпуска в зависимости от предоставленных средств x характеризуется таблицей:

Вложенные средства \ Предприятия	I	II	III	IV
50	17	25	20	30
100	38	40	35	45
150	50	48	52	50
200	55	56	60	55
250	60	62	68	68

9. Решить предыдущую задачу при условии, что исходные ресурсы в размере 200 тыс. руб. распределяются между пятью предприятиями, в каждое из которых нельзя вкладывать более 140 тыс. руб., и прибыль, приносимая каждым предприятием, задана таблицей:

Вложенные средства \ Предприятия	I	II	III	IV	V
10	10	18	20	5	30
20	20	25	40	10	68
30	40	30	60	15	95
40	100	31	80	25	140
50	160	32	95	37	160
60	180	33	101	69	170
70	190	34	102	140	175
80	200	35	103	225	176
90	210	36	104	280	177
100	215	37	105	300	178
110	220	38	106	302	179
120	225	39	107	303	180
130	230	40	108	304	181
140	235	41	109	305	182

10. Найти оптимальное решение в упр. 8 при условии, что начальные средства: а) увеличились на 20 тыс. руб.; б) уменьшились на 20 тыс. руб. (использовать результат упр. 8).

11. Исходная сумма в 300 тыс. руб. должна быть распределена между тремя предприятиями при следующих условиях: средства, выделяемые каждому предприятию x_k ($k=1, 2, 3$), не могут превышать величины d_k тыс. руб., которую предприятие может освоить, и позволяют получить продукции на сумму $f_k(x_k)$ тыс. руб. Значения d_k и $f_k(x_k)$ даны в таблице:

k	I	II	III
d_k	100	75	150
$f_k(x_k)$	$0{,}4x_1^2$	$100x_2$	$120x_3$

Найти оптимальный план распределения средств.

12. Решить упр. 11 для четырех предприятий, если функции d_k и $f_k(x_k)$ заданы таблицей:

k \ x	$f_k(x_k)$: 50	100	150	200	d_k
I	15	20	20	20	100
II	12	24	36	56	150
III	10	20	30	30	150
IV	15	30	30	30	100

13. Решить задачу 2 при следующих условиях:

а) $\xi_0=300$; $n=4$; $f_1(x)=0,6x$; $\varphi_1(x)=0,4$; $f_2(x)=0,3x$, $\varphi_2(x)=0,7x$;

б) $\xi_0=300$; $n=3$; $f_1(x)=0,001x^2$; $\varphi_1(x)=0,7x$; $f_2(x)=0,2x$; $\varphi_2(x)=0,3x$;

в) принять все исходные данные п. б) за исключением функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые заданы в следующей таблице:

Прибыль \ x	50	100	150	200	250	300
$f_1(x)$	6	10	16	24	28	30
$f_2(x)$	5	12	20	25	27	30

г) принять исходные данные п. а) с дополнительным условием, что в качестве капиталовложения используется также полученная прибыль;

д) в задаче п. а) принять дополнительное условие, что финансирование ведется только за счет прибыли и вложенные средства не возвращаются;

е) в задаче п. а) принять, что прибыль полностью вкладывается в производство, но максимизируется только прибыль, получаемая после 4-го года;

ж) в задаче п. а) принять, что ежегодно вкладывается половина прибыли и максимизируется общая сумма остающейся после каждого года прибыли;

з) решить задачу, аналогичную а), при условии, что начальные средства равны 1, $n=5$, а функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ заданы в следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0,2	0,36	0,40	0,18	0,16
0,4	0,68	0,75	0,35	0,30
0,6	0,92	0,96	0,50	0,45
0,8	0,05	1,05	0,70	0,65
1,0	1,10	1,15	0,90	0,80

14. Составить оптимальный план финансирования одного предприятия на трехлетний период, исходя из начальной суммы $\xi_0=300$ тыс. руб., получаемой прибыли $f(x)$, возврата к концу года средств $\varphi(x)$ при условии, что ежегодно (кроме последнего года) вкладывается в производство часть имеющихся средств.

Максимизировать суммарную прибыль при следующих условиях:

а) $f(x)=10-0{,}001(x-100)^2$; $\varphi(x)=0{,}6x$;

б) решить задачу п. а) при $\varphi(x)=0$;

в) в задаче п. б) принять, что в первые два года прибыль задается функцией $f_1(x)=24-0{,}0006(x-200)^2$, а в третьем году — функцией $f_2(x)=16-0{,}0004(x-200)^2$;

г) в п. а) принять, что функции прибыли заданы таблицей:

k	$f_k(x)$ \ x	50	100	150	200	250	300
1	$f_1(x)$	7	10	15	20	18	16
2	$f_2(x)$	8	12	16	21	20	20
3	$f_3(x)$	6	12	15	18	20	24

15. Распределить имеющиеся средства $\xi_0=50$ тыс. руб. между тремя предприятиями при заданных функциях прибыли $f_1(x)=0{,}12\,x$; $f_2(x)=0{,}0012\,x^2$; $f_3(x)=-0{,}0024\,x^2+0{,}36\,x$ из условия максимизации суммарной прибыли.

16. По исходным данным упр. **15** составить модель для определения оптимального графика распределения средств в течение трех периодов времени, если известно, что по истечении каждого периода выданная сумма x уменьшается до $\varphi_1(x)=0{,}5\,x$ на I предприятии, до $\varphi_2(x)=0$ — на II и до $\varphi_3(x)=0{,}3\,x$ — на III. Предполагается, что прибыль в распределении не участвует.

Указание. Состояние системы на каждом шаге характеризовать одним параметром при наличии двух управляющих переменных: x_1 — средства, выделяемые I предприятию, x_2 — средства, выделяемые II предприятию.

17. Решить упр. **16** при $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi_3(x)=0$, полагая, что во 2-м и в 3-м периодах получаемая прибыль распределяется полностью.

18. Для обеспечения производства трех видов продукции имеются ресурсы двух видов сырья в количестве 10 и 12 ед. В таблицах приведены данные о расходе каждого из видов сырья на изготовление единицы продукции и прибыль в зависимости от объема производства:

Затраты на 1 шт.

Сырье \ Предприятия	1	2	3
I	2	4	1
II	4	2	3

Прибыль

Предприятия \ Объем производства	1	2	3	4	5	6
1	8	15	21	26	30	32
2	7	14	20	26	31	34
3	10	18	24	26	28	30

Найти оптимальное распределение наличных ресурсов из условия максимизации прибыли, рассматривая выпуск продукции только в целых единицах.

19. Решить упр. 18 при условии, что зависимость прибыли от объема производства задана аналитически: $f_1(x)=30+\sqrt[3]{x-5}$; $f_2(x)=6x$; $f_3(x)=1{,}2x^2$.

20. Решить задачу, аналогичную задаче 5, при условиях, что функции дохода и возврата средств одинаковы на каждом шаге и составляют

$$f_1\left(x_k, \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right) = 0{,}4x_k + 0{,}1\sum_{j=1}^{k-1} x_j,$$

$$f_2\left(y_k, \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right) = 0{,}3y_k + 0{,}2\sum_{j=1}^{k-1} y_j,$$

$$\varphi_1\left(x_k, \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right) = 0{,}5x_k + 0{,}1\sum_{j=1}^{k-1} x_j,$$

$$\varphi_2\left(y_k, \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right) = 0{,}8y_k + 0{,}1\sum_{j=1}^{k-1} y_j;\ \xi_0 = 1,\ n = 3.$$

21. Изменить условие задачи 6, включив в него предприятие IV, для которого полуфабрикатом является продукция первых трех предприятий, а функция $f_4(x_4,\ x_1+x_2+x_3)$, выражающая величину произведенной продукции, задана таблицей:

$x_1+x_2+x_3$ \ x_4	1	2	3	4	5
0	1,7	2,1	2,6	2,9	3,2
1	2,4	3,5	3,9	4,2	4,2
2	2,9	3,9	4,7	5,7	5,7
3	3,5	4,7	5,3	6,3	—
4	3,9	5,3	—	—	—
5	4,9	—	—	—	—

ГЛАВА III

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

§ 1. Постановка задачи

Класс задач, в которых рассматривается оптимальное управление запасами, является наиболее характерным для динамического программирования. Это обусловлено тем, что в задачах управления запасами процесс естественно разворачивается во времени, причем управление как раз и заключается в том, что решение на данном промежутке времени принимается с учетом того состояния, к которому пришла система за предшествующие периоды времени. Кроме того, эти задачи связаны, как правило, с дискретным характером переменных и, следовательно, решаются довольно сложно другими методами. Наконец, весьма важным обстоятельством является то, что форма зависимостей задачи для каждого периода времени является довольно простой (часто — линейной), что облегчает решение частной задачи оптимизации на каждом шаге, в то время как единовременное решение общей задачи с большим числом переменных (для многих промежутков времени и кусочно-линейной или нелинейной целевой функцией для всего процесса) является достаточно сложным.

Проблема управления запасами является одной из важнейших областей практического приложения экономико-математических методов, в том числе методов математического программирования. Мы ограничимся анализом некоторых простейших задач с целью иллюстрации их решения методами динамического программирования.

При формулировке задач управления запасами используют такие понятия.

Запасы — это любые денежные или материальные ценности, которые периодически пополняются (производятся, доставляются и т. д.) и некоторое время сохраняются с целью расходования их в последующие промежутки времени. Уровень запасов в любой момент времени определяется начальным уровнем запасов плюс пополнение и минус расход за промежуток времени от начального момента до данного.

Управление запасами в общем случае состоит в воздействии на соотношение между двумя основными факторами — пополнением и расходом. Цель управления — оптимизация некоторого критерия, зависящего от расходов на хранение запасов, стоимости поставок, затрат, связанных с пополнением, штрафов и т. д.

В такой общей постановке подобные задачи могут иметь самое разнообразное практическое применение. Например, под запасами можно понимать продукцию предприятия, которая производится непрерывно (пополнение) и отгружается потребителям определенными дискретными партиями (расход). При этом спрос на продукцию предполагается наперед заданным (детерминированный спрос) или подверженным случайным колебаниям (стохастическая задача). Управление запасами состоит в определении размеров необходимого выпуска продукции для удовлетворения заданного спроса. Цель — минимизация суммарных затрат на хранение и пополнение запасов. Под запасами можно понимать запасы сырья или других материалов, поставляемых дискретными партиями (пополнение) и должных обеспечить непрерывное потребление в процессе производства (расход). Критерием оптимальности могут служить суммарные затраты на хранение запасов, замораживание оборотных средств и поставки запасов.

Запасами могут быть товары, поставляемые в магазин определенными партиями и предназначенные для удовлетворения непрерывного, но подверженного случайным колебаниям покупательского спроса. Критерий оптимальности — суммарные затраты на поставки, хранение запасов и изменение производственного ритма в связи с вариациями спроса.

Запасами могут быть и сезонные товары, сохраняющиеся на складе ограниченной емкости. Товары можно покупать и продавать в различных количествах по ценам, меняющимся во времени. Задача состоит в определении политики покупок и продаж, обеспечивающих максимум суммарной прибыли, и является примером задачи складирования.

Число таких примеров можно было бы умножить. Однако в настоящем параграфе мы рассмотрим лишь некоторые простейшие динамические модели задач управления запасами.

Если в задаче исходные данные определены однозначно, то задачи называются *детерминированными*; если же хотя бы часть данных носит случайный характер и заданы распределения вероятностей, то соответствующие задачи называются *стохастическими*. В этой главе мы ограничимся примерами детерминированных задач управления запасами.

§ 2. Оптимальное управление запасами при заданном расходе

Рассмотрим модель задачи управления запасами при заданном расходе. Управление в этих задачах будет сводиться к пополнению.

Задача 1. Планируемый период разделен на n промежутков времени (дни, месяцы, кварталы и т. д.), в которых задан расход d_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, производимый в конце каждого из промежутков. Известны начальный уровень запасов и зависимость суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от среднего уровня хранимых запасов и их пополнения.

Требуется определить размеры пополнения запасов в каждом промежутке времени для удовлетворения заданного расхода из условия минимизации суммарных затрат за весь планируемый период времени.

Составим математическую модель задачи. Обозначим размер пополнения запасов в k-м промежутке времени через x_k, а уровень запасов в начале этого промежутка (после произведенного расхода) — через ξ_{k-1}. Согласно условию, суммарные затраты в k-м промежутке зависят от x_k и $\bar{\xi}_k$ — среднего уровня запасов в k-м промежутке, равного

$$\bar{\xi}_k = \xi_{k-1} + x_k/2. \qquad (3.1)$$

Следовательно, затраты в k-м промежутке можно рассматривать как функцию $f_k(\xi_{k-1}, x_k)$.

Целевая функция задачи — суммарные затраты — запишется в виде

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi_{k-1}, x_k). \qquad (3.2)$$

Требуется определить переменные x_k, которые связаны с переменными ξ_{k-1} балансовыми уравнениями

$$\xi_k = \xi_{k-1} + x_k - d_k, \qquad (3.3)$$

выражающими уровень запаса в начале $(k+1)$-го промежутка через сумму уровня запасов в начале k-го промежутка (ξ_{k-1}) и пополнения запасов в этом промежутке x_k минус расход d_k.

Условия удовлетворения расхода в каждом промежутке можно выразить с помощью неравенств

$$\xi_k \geqslant 0. \qquad (3.4)$$

Наконец, переменные x_k по смыслу должны удовлетворять условиям неотрицательности

$$x_k \geqslant 0. \qquad (3.5)$$

Ставится задача — найти совокупность n переменных x_k, удовлетворяющих ограничениям (3.3)—(3.5) и минимизирующих функцию (3.2).

Подобные задачи при большом числе переменных и нелинейности функций $f_k(\xi_{k-1}, x_k)$ другими методами математического программирования решаются сложно. Особенно сложным становится решение, когда на переменные x_k налагаются условия целочисленности (или в общем случае — дискретности), как это часто бывает.

Дадим описание динамической модели задачи. Будем рассматривать n-шаговый процесс оптимизации с параметрами состояния ξ_k и переменными управлениями x_k. Тогда равенство (3.3) представляет собой уравнение состояния. Здесь удобнее использовать прямую схему расчета, так как задано конечное состояние.

В задачах управления запасами чаще всего возникает именно такая ситуация, поэтому продемонстрируем построение прямой схемы вычислений.

Обозначим через $Z_k^*(\xi_k)$ условные оптимальные затраты за промежутки, начиная с 1-го до k-го включительно, если в конце k-го промежутка уровень запасов равен ξ_k.

Начинаем с условной оптимизации 1-го шага в предположении, что к концу этого шага система окажется в состоянии ξ_1:

$$Z_1^*(\xi_1)=\min_{x_1}\{f_1(\xi_0, x_1)\}. \tag{3.6}$$

На k-м шаге получим соответственно

$$Z_k^*(\xi_k)=\min_{x_k}\{f_k(\xi_{k-1}, x_k)+Z_{k-1}^*(\xi_{k-1})\}. \tag{3.7}$$

В соответствии с формой рекуррентных соотношений удобно и уравнение состояния (3.3) записать в виде

$$\xi_{k-1}=\xi_k-x_k+d_k. \tag{3.8}$$

При решении локальных задач в соответствии с уравнениями (3.6) и (3.7) будем считать, что состояние ξ_k в конце шага известно. Поэтому и неравенство (3.4) удобно записать для ξ_{k-1}, т. е. в виде $\xi_{k-1}=\xi_k-x_k+d_k\geqslant 0$, откуда следуют ограничения на x_k:

$$x_k\leqslant \xi_k+d_k. \tag{3.9}$$

Функцию затрат также удобно привести к зависимости от состояния в конце шага, используя уравнение (3.8):

$$f_k(\xi_{k-1}, x_k)=f_k(\xi_k-x_k+d_k, x_k).$$

Выполнив условную оптимизацию, получим последовательно

$$Z_1^*(\xi_1),\ x_1^*(\xi_1),\ \ldots,\ Z_k^*(\xi_k),\ x_k^*(\xi_k),\ \ldots,\ Z_n^*(\xi_n),\ x_n^*(\xi_n).$$

Далее (безусловная оптимизация), находим $Z_{\max}=$ $=Z_n^*(\xi_n^*)$ при заданном конечном состоянии, или $Z_{\max}=$ $=\max Z_n^*(\xi_n)$ и ξ_n^*, если конечное состояние не задано. Затем последовательно определяем

$$x_n^*=x_n^*(\xi_n^*),\ \xi_{n-1}^*=\xi_n^*-x_n^*+d_n,\ x_{n-1}^*=x_{n-1}^*(\xi_{n-1}^*),\ \ldots,\ \xi_1^*= \\ =\xi_2^*-x_2^*+d_2,\ x_1^*=x_1^*(\xi_1^*).$$

Изложенная схема вычисления используется ниже при решении двух конкретных задач, непрерывной и дискретной.

§ 3. Числовой пример (непрерывная модель)

Задача 2. Решить задачу 1 при следующих условиях: $n=3$, $\xi_0=100$, $\xi_3=30$, $d_1=150$, $d_2=50$, $d_3=100$. Затраты не зависят от промежутков времени и состоят из двух слагаемых:

$$f(\bar{\xi}_k, x_k)=\varphi(\bar{\xi}_k)+\psi(x_k), \tag{3. 10}$$

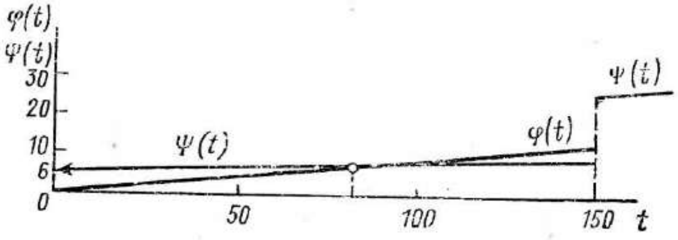

Рис. 4

где $\varphi(\bar{\xi}_k)$ (затраты на хранение) и $\psi(x_k)$ (затраты на пополнение) заданы формулами

$$\varphi(\bar{\xi}_k)=0{,}1\bar{\xi}_k,\ \psi(x_k)=\begin{cases} 0 & \text{при } x_k=0, \\ 6+0{,}04x_k & \text{при } 0<x_k\leqslant 150, \\ 12+0{,}16x_k & \text{при } 150<x_k<\infty. \end{cases}$$

Графики этих функций изображены на рис. 4.

Подставляя из равенства (3.1) значение для среднего уровня запаса и используя уравнение (3.8), первое слагаемое в соотношении (3.10) можно представить в виде

$$\varphi(\bar{\xi}_k)=0{,}1\xi_k-0{,}05x_k+0{,}1d_k.$$

Теперь перейдем к выполнению условной оптимизации.

Для 1-го шага, согласно (3.6), получим

$$Z_1^*(\xi_1)=\min_{x_1}\{0{,}1\xi_1-0{,}05x_1+0{,}1d_1+\psi(x_1)\}.$$

Для x_1 имеем единственное значение

$$x_1=\xi_1-\xi_0+d_1=\xi_1-100+150=\xi_1+50,$$

которое и следует подставить в выражение, содержащееся в фигурных скобках. Так как имеются три различных альтернативы для $\psi(x)$, то получим разные выражения и для $Z_1^*(\xi_1)$. Но поскольку $x_1>0$, остаются два выражения для $\psi(x)$. Если $\xi_1\leqslant 100$, то $x_1\leqslant 150$ и следует выбрать второе выражение, если же $\xi_1>100$ — то третье. Окончательно получим

$$Z_1^*(\xi_1)=\begin{cases}0{,}09\xi_1+20{,}5 \text{ при } \xi_1\leqslant 100,\\ 0{,}21\xi_1+32{,}5 \text{ при } \xi_1>100.\end{cases}$$

Переходим к оптимизации 2-го шага, согласно выражению

$$Z_2^*(\xi_2)=\min_{0<x_2\leqslant\xi_2+50}\{0{,}1\xi_2-0{,}05x_2+5+\psi(x_2)+Z_1^*(\xi_1)\}.$$

Обозначим выражение, стоящее в фигурной скобке, через $Z_2(\xi_2, x_2)$. Развернутое выражение для этой функции требует сочетания трех вариантов выражений для $\psi(x_2)$ в зависимости от значений x_2 и двух вариантов для $Z_1^*(\xi_1)$ в зависимости от значений $\xi_1=\xi_2-x_2+50$, т. е. от значений ξ_2 и x_2, следовательно, всего шести вариантов. Однако в данном случае анализ можно упростить, учитывая, что в любом из указанных вариантов $Z_2(\xi_2, x_2)$ является линейной функцией от x_2, а линейная функция может принимать наибольшее и наименьшее значения лишь на границах интервала изменения x_2, т. е. при $x_2=0$ и $x_2=\xi_2+50$. Поэтому исследуем только эти две точки.

При $x_2=0$ имеем $\xi_1=\xi_2+50$, а при $x_2=\xi_2+50$ соответственно $\xi_1=0$. Для первой точки выбор варианта определяется выражением для $Z_1^*(\xi_1)$, поэтому необходимо рассмотреть два случая: $\xi_1=\xi_2+50\leqslant 100$, откуда $\xi_2\leqslant 50$, и $\xi_1+50>100$, откуда $\xi_2>50$. Для второй точки выбор варианта определяется только выражением для $\psi(x_2)$, зависящим от значений $x_2=\xi_2+50\leqslant 150$ и $\xi_2+50>150$, откуда $\xi_2\leqslant 100$ и $\xi_2>100$.

Итак, всего необходимо проанализировать три интервала для ξ_2: $0<\xi_2\leqslant 50$, $50<\xi_2\leqslant 100$, $\xi_2>100$, а затем в каждом из них выбрать наименьшее из значений $Z_2(\xi_2, x_2)$ в двух указанных точках.

Для облегчения дальнейших расчетов сведем их во вспомогательную таблицу (см. табл. 1).

Выбор меньшей величины из двух выражений для ξ_2 в интервале $50<\xi_2\leqslant 100$ решается сразу (меньшее значение подчеркнуто). В интервалах $0<\xi_2<50$ и $\xi_2>100$ необходимы дополнительные исследования. Так, например, для интервала $0<\xi_2<50$ необходимо сравнить значения функций $Z_2=0{,}19\xi_2+25{,}5$ и $Z_2=0{,}09\xi_2+31$, графически изображаемых прямыми (рис. 5). Эти прямые пересекаются при $\xi_2=55$, т. е. в точке, лежащей вне исследуемого интервала. В данном интервале первая прямая лежит ниже второй; следовательно, $0{,}19\xi_2+25{,}5<$ $<0{,}09\xi_2+31$. Аналогично выбираем меньшее выражение

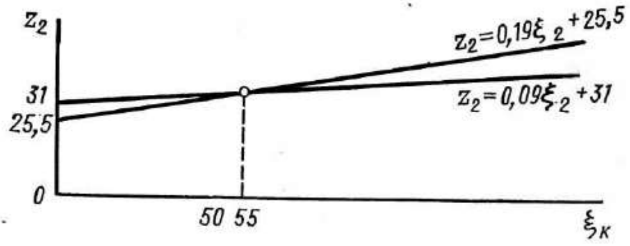

Рис. 5

при $\xi_2>100$. Подчеркнутые выражения для $Z_2^*(\xi_2)$ представляют собой искомые условные минимумы $Z_2^*(\xi_2)$, а соответствующие им $x_2^*(\xi_2)$ — условные оптимальные управления.

Оптимизация на 3-м шаге выполняется проще, так как задано конечное состояние $\xi_3=30$ и не требуется исследовать различные возможные его значения. Имеем

$$Z_3^*(\xi_3)=\min_{0<x_3<\xi_3+100}\{0{,}1\xi_3-0{,}05x_3+\psi(x_3)+Z_2^*(\xi_2)\}.$$

Вновь исследуем две крайние точки $x_3=0$ и $x_3=$ $=\xi_3+100$, которым соответствуют $\xi_2=\xi_3+100$ и $\xi_2=0$. При выборе вариантов для ψ и $Z_2^*(\xi_2)$ учитываем заданное значение $\xi_3=30$. Обозначив выражение в фигурной скобке через $Z_3(\xi_3, x_3)$, получим $Z_3(0, \xi_3)=0{,}31\xi_3+74$ и $Z_3(\xi_3+100, \xi_3)=0{,}09\xi_3+40{,}5$. Очевидно, что при всех ξ_3 выполняется неравенство $Z_3(\xi_3+100, \xi_3)<Z_3(0, \xi_3)$, т. е. $Z_3^*(\xi_2)=0{,}09\xi_3+40{,}5$.

Перейдем к безусловной оптимизации. При $\xi_3^*=30$ получаем $Z_{\min}=43{,}2$; $x_3^*=130$. Далее, находим $\xi_2^*=$ $=\xi_3^*-x_3^*+100=0$, откуда $x_2^*=0$, и $\xi_1^*=\xi_2^*-x_2^*+50=$ $=50$, т. е. $x_1^*=\xi_1^*+50=100$. Итак, мы получили безусловный минимум и безусловное оптимальное управление.

Таблица 1

ξ_2	x_2	$\psi(x_2)$	ξ_1	$Z_1^*(\xi_1)$	$\varphi(\xi_2)$	$Z_2^*(\xi_2)$
От 0 до 50	$\underline{0}$	0	от 50 до 100	$0,09\xi_2+20,5$	$0,1\xi_2+5$	$\underline{0,19\xi_2+25,5}$
	ξ_2+50	$8+0,04\xi_2$	0	20,5	$0,05\xi_2+2,5$	$0,09\xi_2+31$
От 50 до 100	0	0	от 100 до 150	$0,21\xi_2+32,5$	$0,1\xi_2+5$	$0,31\xi_2+37,5$
	$\underline{\xi_2+50}$	$8+0,04\xi_2$	0	20,5	$0,05\xi_2+25$	$\underline{0,09\xi_2+31}$
Более 100	0	0	Более 150	$0,21\xi_2+32,5$	$0,1\xi_2+2,5$	$0,31\xi_2+35$
	$\underline{\xi_2+50}$	$20+0,16\xi_2$	0	25	$0,05\xi_2+2,5$	$\underline{0,21\xi_2+43}$

Если нас интересует, как влияет на величину Z изменение конечного состояния, то следует обратиться к формулам для $Z_3^*(\xi_3)$. Из этих формул, в частности, следует, что относительное изменение $\Delta Z_{\min}$ определяется равенством $\Delta Z_{\min}=0{,}09\Delta\xi_3$.

§ 4. Модель управления запасами с вогнутой функцией затрат

Задача, рассмотренная в предыдущем параграфе, интересна с точки зрения использованного вычислительного приема.

Все расчеты при решении этой задачи упростились потому, что функции $Z_2(x_2, \xi_2)$ и $Z_3(x_3, \xi_3)$ оказались линейными. Это позволило ограничиться анализом только крайних точек в допустимых для x_2 и x_3 интервалах и упростило проведение условной оптимизации.

Данная задача является примером более общего случая, когда функции $\psi_k(x_k)$ — затраты на производство — и $\varphi_k(\xi_k)$ — затраты на хранение — являются вогнутыми *. Тогда суммарные затраты $f_k(\xi_k, x_k)$ и целевая функция $Z=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\xi_k, x_k)$ — также вогнутые функции от переменных ξ_k и x_k.

Если $Z=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\xi_k, x_k)$ — общая сумма затрат, то вогнутость функций Z означает, что каждая дополнительная единица продукции (производимая, хранимая) стоит не больше предыдущей. Подобная ситуация чаще всего встречается в производстве.

Модель задачи с вогнутыми функциями затрат на производство и хранение называется *динамической моделью экономически выгодного размера партии* [3].

Вогнутость функции производственных затрат встречается, например, в случае, если выпуск продукции связан с затратами на дополнительную операцию, переналадку оборудования или освоение нового оборудования. После этой подготовительной стадии процесса производства (больших единовременных затрат) выпуску каждой

---

* Функция $f(x)$, определенная в промежутке X, называется *вогнутой*, если для любых точек $x_1\in X$, $x_2\in X$ $(x_1\neq x_2)$ выполняется неравенство $f(t_1x_1+t_2x_2)\geqslant t_1f(x_1)+t_2f(x_2)$ при любых $t_1\geqslant 0$, $t_2\geqslant 0$ таких, что $t_1+t_2=1$.

дополнительной единицы продукции соответствуют не меняющиеся пропорциональные затраты.

Другим примером может служить модель задачи пополнения запасов у внешнего поставщика, который нередко делает скидки в зависимости от размера закупаемой партии, назначает ступенчатые цены.

Например, функция

$$\psi_k(x_k)=\begin{cases}20x_k & \text{при } 0\leqslant x_k\leqslant 10,\\ 240+15(x_k-10) & \text{при } 11\leqslant x_k\leqslant 30,\\ 690+5(x_k-20) & \text{при } x_k\geqslant 31\end{cases}$$

является вогнутой, так как коэффициент при x_k убывает с ростом x_k.

Структура оптимального решения в случае вогнутых функций затрат описана, например, в [3].

В частности, известно, что глобальный минимум вогнутой функции достигается по крайней мере в одной из угловых точек области. В рассмотренном выше случае область задана системой n линейных уравнений (3.3) и условиями неотрицательности (3.4) и (3.5). Угловым точкам области соответствуют опорные решения системы (3.3), в каждом из которых не более чем n переменных x_k и ξ_k положительны, а остальные равны нулю. Предположим, что все $d_k>0$ и $\xi_0=0$. Тогда, при любом k, если $\xi_{k-1}=0$, то $x_k>0$, а если $x_k=0$, то $\xi_{k-1}>0$, иначе нечем будет обеспечить расход d_k к концу k-го периода. Одновременно невозможно, чтобы $\xi_{k-1}>0$ и $x_k>0$, так как при этом в опорном решении системы (3.3) оказалось бы более чем n положительных составляющих.

Из уравнения состояния (3.8) получим

$$\begin{aligned}&\xi_{k-1}=\xi_k+d_k \quad \text{при } x_k=0,\\ &\xi_{k-1}=0 \qquad\quad\ \ \text{при } x_k=\xi_k+d_k.\end{aligned}$$

При проведении условной оптимизации на k-м шаге согласно уравнению (3.7) достаточно сравнить и выбрать наименьшее из двух значений в указанных двух точках, которые принимает выражение, содержащееся в фигурных скобках:

$$Z_k^*(\xi_k)=\min\begin{cases}f_k(\xi_k+d_k,\ 0)+Z_{k-1}^*(\xi_k+d_k) & \text{при } x_k=0;\\ f_k(0,\ \xi_k+d_k)+Z_{k-1}^*(0) & \text{при } x_k=\xi_k+d_k.\end{cases}$$

Для 1-го шага (при $k=1$) имеем $x_1^*(\xi_1)=\xi_1+d_1$ и, следовательно,

$$Z_1^*(\xi_1)=f_1(0,\ \xi_1+d_1).$$

Оптимальное управление пополнением запасов x_k на любом k-м шаге имеет следующий вид: 0 (при $\xi_{k-1}>0$); или d_k (при $\xi_{k-1}=0$, $\xi_k=0$); или d_k+d_{k+1} (при $\xi_{k-1}=0$, $\xi_{k+1}=0$); ...; или $d_k+d_{k+1}+\ ...\ +d_n+\xi_n$.

§ 5. Дискретная модель управления запасами

Задача 3. Определить оптимальное пополнение запасов в течение четырех периодов при следующих условиях: $\xi_0=10$; $\xi_4=0$; $d_1=150$; $d_2=50$; $d_3=d_4=100$; пополнение запасов может производиться партиями, кратными 50; функции затрат на хранение $\varphi(\overline{\xi}_k)$ и на пополнение $\psi(x_k)$, одинаковые для всех периодов времени, заданы в табл. 2:

Таблица 2

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$\varphi(t)$	0	3	8	15	30	40	49	55	58	60	62	64	65
$\psi(t)$	0	—	22	—	32	—	35	—	50	—	70	—	90

Задача носит дискретный характер. Для упрощения, поскольку расход и пополнение кратны 50, расчеты будем вести в целых партиях. Таким образом, $d_1=3$, $d_2=1$, $d_3=2$, $d_4=2$, переменные x_k и параметры ξ_k меняются с шагом в единицу. Вычисления выполняем в соответствии с моделью, приведенной в задаче 1. Как обычно, при выполнении первого этапа расчеты производим в таблицах: основной (табл. 3) и вспомогательных (табл. 4—7).

Для 1-го шага имеем единственное значение $x_1=$ $=\xi_1-\xi_0+d_1=\xi_1+1$. Поэтому

$$Z_1^*(\xi_1)=\varphi(\overline{\xi}_1)+\psi(\xi_1+1),\ \ \text{где}\ \overline{\xi}_1=\xi_0+0{,}5x_1=2{,}5+0{,}5\xi_1.$$

Прежде чем перейти к табулированию, определим предельные значения для параметров состояния. Так как $\xi_4=0$, то даже при $x_4=0$ должно быть $\xi_3=2$, следовательно, $\xi_3\leqslant2$. Соответственно $\xi_2\leqslant4$, $\xi_1\leqslant5$.

Таблица 3 (основная)

ξ	1-й шаг		2-й шаг		3-й шаг	
	$Z_1^*(\xi_1)$	$x_1^*(\xi_1)$	$Z_2^*(\xi_2)$	$x_2^*(\xi_2)$	$Z_3^*(\xi_3)$	$x_3^*(\xi_3)$
0	62	1	85	1	125	2
1	81	2	102	2	135	3
2	90	3	112	3	165	4
3	108	4	142	4	—	—
4	130	5	172	5	—	—
5	152	6	—	—	—	—

Вычисление Z_1^* (ξ_1) приведено в табл. 4.

Таблица 4

ξ_1	0	1	2	3	4	5
x_1	1	2	3	4	5	6
$\overline{\xi_1}$	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\varphi(\overline{\xi}_1)$	40	49	55	58	60	62
$\psi(\xi_1+1)$	22	32	35	50	70	90
$Z_1^*(\xi_1)$	$\underline{62}$	81	90	108	130	152

2-й шаг выполняем в табл. 5 согласно соотношению

$$Z_2^*(\xi_2)=\min_{0\leqslant x_2\leqslant \xi_2+1}\{\varphi(\overline{\xi}_2)+\psi(x_2)+Z_1^*(\xi_1)\}.$$

Таблица 5

ξ_2	0		1			2			
x_2	0	1	0	1	2	0	1	2	3
ξ_1	1	0	2	1	0	3	2	1	0
$\overline{\xi_2}$	1	0,5	2	1,5	1	3	2,5	2	1,5
$\varphi(\overline{\xi}_2)$	8	3	30	15	8	49	40	30	25
$\psi(x_2)$	0	22	0	22	32	0	22	32	35
$Z_1^*(\xi_1)$	81	62	90	81	62	108	90	81	62
$Z_2(x_2,\xi_2)$	$\underline{89}$	85	120	118	$\underline{102}$	157	152	143	$\underline{112}$

ξ_2	3					4					
x_2	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
ξ_1	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
$\overline{\xi_2}$	4	3,5	3	2,5	2	5	4,5	4	3,5	3	2,5
$\varphi(\bar{\xi}_2)$	58	55	49	40	30	62	60	58	55	49	40
$\psi(x_2)$	0	22	32	35	50	0	22	32	35	50	70
$Z_1^*(\xi_1)$	130	108	90	81	62	152	130	108	90	81	62
$Z_2(x_2, \xi_2)$	188	185	171	156	142	214	212	198	180	180	172

Для 3-го шага имеем $\xi_2=\xi_3-x_3+2$, $x_3\leqslant\xi_2+2$ и

$$Z_3^*(\xi_3)=\min_{0\leqslant x_3\leqslant \xi_2+2}\{\varphi(\bar{\xi}_3)+\psi(x_3)+Z_2^*(\xi_2)\}.$$

Вычисление $Z_3^*(\xi_3)$ приведено в табл. 6.

Таблица 6

ξ_3	0			1				2				
x_3	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
ξ_2	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
$\bar{\xi}_3$	2	1,5	1	3	2,5	2	1,5	4	3,5	3	2,5	2
$\varphi(\bar{\xi}_3)$	30	15	8	49	40	30	15	58	55	49	40	30
$\psi(x_3)$	0	22	32	0	22	32	35	0	22	32	35	50
$Z_2^*(\xi_2)$	112	102	85	142	112	102	85	172	142	112	102	85
$Z_3(x_3, \xi_3)$	142	139	125	191	174	164	135	180	219	193	177	165

Вычисление $Z_4^*(0)$ приведено в табл. 7.

Таблица 7

ξ_4	0		
x_4	0	1	2
ξ_3	2	1	0
$\bar{\xi}_4$	2	1,5	1
$\varphi(\bar{\xi}_4)$	30	15	8
$\psi(x_4)$	0	22	32
$Z_3^*(\xi_3)$	165	135	125
$Z_4(x_4,\ \xi_4)$	195	172	$\underline{165}$

Для 4-го шага имеем $\xi_4=0$. Следовательно, $\xi_3+x_4-2=0$, откуда $\xi_3=2-x_4$ и $x_4\leqslant 2$ (табл. 7).

После выполнения минимизации получим $Z_{\min}=$ $=Z_4^*(0)=165$ при $x_4^*=2$.

Далее, последовательно вычисляем $\xi_3^*=2-x_4=0$; $x_3^*(0)=2$; $\xi_2^*=\xi_3^*-x_3+2=0$; $x_2^*(0)=1$; $\xi_1^*=\xi_2^*-x_2^*+1=$ $=0$; $x_1^*(0)=1$.

§ 6. Динамическая модель задачи складирования

В заключение настоящей главы рассмотрим тип задач, названных выше задачами складирования.

Особенностью этих задач является наличие двух переменных управления (двумерная модель). Однако решение этих задач значительно упрощается благодаря линейности целевой функции.

Задача 4. Емкость склада по хранению запасов ограничена некоторой величиной c. В каждом из n промежутков времени запасы могут пополняться с затратами α_k на единицу продукции и расходоваться с получением дохода β_k за единицу продукции, причем решение о пополнении или расходовании запасов принимается однократно в каждом промежутке времени. Определить оптимальную стратегию в управлении запасами из условия максимизации суммарной прибыли при заданном начальном уровне запасов.

Уточним постановку задачи. Возможны три варианта в очередности пополнения и расходования запасов в каждом из промежутков времени: I вариант — пополнение предшествует расходу; II вариант — расход предшествует пополнению и III вариант — очередность любая. В III варианте выбор оптимальной стратегии означает не только определение размера пополнения и расхода, но и выбор оптимальной очередности в каждом из промежутков времени.

Указанные варианты условий отразятся на форме ограничений модели задачи.

Составим динамическую модель задачи. Рассмотрим n-шаговый процесс, понимая под k-м шагом промежуток времени, в котором принимается решение о пополнении или расходовании запасов ($k=1, 2, \dots, n$).

В качестве параметров состояния ξ_{k-1} примем запас товаров в начале k-го шага. Переменными управления служат размеры пополнения (x_k) и расхода (y_k) запасов на k-м шаге. Тогда уравнение состояния, выражающее материальный баланс запасов, запишется в виде

$$\xi_k = \xi_{k-1} + x_k - y_k. \tag{3.11}$$

Будем решать задачу с помощью обратной вычислительной схемы, т. е. используя рекурентные соотношения в виде

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{x_n, y_n} \{\beta_n y_n - \alpha_n x_n\}, \tag{3.12}$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_k, y_k} \{\beta_k y_k - \alpha_k x_k + Z_{k+1}^*(\xi_k)\}. \tag{3.13}$$

Переменные задачи должны удовлетворять условиям неотрицательности:

$$x_k \geqslant 0, \quad y_k \geqslant 0 \tag{3.14}$$

и дополнительным ограничениям для всех k, зависящих от варианта постановки задачи:

I вариант: $\xi_{k-1} + x_k \leqslant c$, $y_k \leqslant \xi_{k-1} + x_k$; (3.15)

II вариант: $\xi_{k-1} - y_k + x_k \leqslant c$, $y_k \leqslant \xi_{k-1}$; (3.15′)

III вариант: или (3.15), или (3.15′).

Первые неравенства в (3.15) и (3.15′) диктуются ограниченной емкостью склада, вторые — условием, согласно которому расход не может превышать наличные запасы. Для III варианта альтернативные условия означают, что если будет принято решение сначала пополнить запасы, а затем их расходовать, то должны выполняться условия (3.15); если же будет принят противоположный порядок, то должны выполняться условия (3.15′).

Решение задач условной максимизации по двум переменным согласно рекурентным соотношениям (3.12) и (3.13) в общем случае представляет собой сложную задачу, однако линейность функций $Z_n(x_n, y_n) = \beta_n y_n - \alpha_n x_n$ и $Z_k(x_k, y_k) = \beta_k y_k - \alpha_k y_k + Z^*_{k+1}(\xi_{k-1} + x_k - y_k)$, максимумы которых определяются на каждом шаге, а также ограничений, налагаемых на переменные, позволяет значительно упростить решение всех этих частных задач.

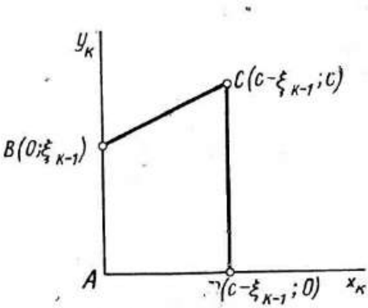

Рис. 6

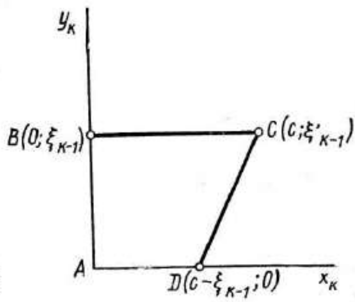

Рис. 7

Рассмотрим подробнее решение задачи в I варианте постановки. Ограничения (3.14) и (3.15) определяют при данном значении параметра ξ_{k-1} область допустимых значений x_k и y_k в виде выпуклого четырехугольника $ABCD$, изображенную на рис. 6. Так как в этой области максимизируется линейная функция, то получается задача линейного программирования, оптимальное решение которой достигается, по крайней мере, в одной из вершин области. На рис. 6 находим координаты всех четырех вершин: $A(0; 0)$, $B(0; \xi_{k-1})$, $C(c - \xi_{k-1}; c)$, $D(c - \xi_{k-1}; 0)$. Поэтому вместо нахождения максимума по соотношениям (3.12) и (3.13) при произвольных изменениях x_k и y_k достаточно вычислить значения выражений, содержащихся в фигурных скобках, во всех четырех вершинах и путем сравнения выбрать среди них наибольшее.

При этом для последнего (n-го) шага можно ограничиться выбором из двух альтернатив, так как значение $Z_n(x_n, y_n) = \beta_n y_n - \alpha_n x_n$ в точках A и D дает заведомо меньшее число, чем соответственно в точках B и C.

Итак, для n-го шага получаем

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max \begin{cases} \beta_n \xi_{n-1} & (B), \\ (\beta_n - \alpha_n)\, c + \alpha_n \xi_{n-1} & (C). \end{cases} \quad (3.12')$$

Для выполнения оптимизации на последующих шагах предварительно найдем из уравнения (3.11) значение ξ_k для каждой точки. Тогда получим: $\xi_k = \xi_{k-1}$ в точке A; $\xi_k = 0$ в точке B; $\xi_k = 0$ в точке C; $\xi_k = c$ в точке D. Вместо соотношения (3.13) получаем

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max \begin{cases} Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}) & (A), \\ \beta_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & (B), \\ (\beta_k - \alpha_k)\, c + \alpha_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & (C), \\ \alpha_k \xi_{k-1} - \alpha_k c + Z_{k+1}^*(c) & (D). \end{cases} \quad (3.13')$$

При выполнении практических расчетов оказывается достаточным не табулировать функции $Z_k^*(\xi_{k-1})$ для всех значений ξ_{k-1}, а ограничиться вычислением этих функций лишь для крайних значений ξ_{k-1}, т. е. для $\xi_{k-1} = 0$, $\xi_{k-1} = c$.

В случае II варианта исходной постановки задачи получим область, изображенную на рис. 7. В новой области изменятся лишь координаты вершины C; находим $x_k = c$, $y_k = \xi_{k-1}$. Аналогично предыдущему получим следующие формулы для выполнения условной максимизации:

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \beta_n \xi_{n-1} \quad (B), \quad (3.12'')$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max \begin{cases} Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}) & (A), \\ \beta_k \xi_{k-1} + Z_{k+1}^*(0) & (B), \\ \beta_k \xi_{k-1} - \alpha_k c + Z_{k+1}^*(c) & (C), \\ \alpha_k (\xi_{k-1} - c) + Z_{k+1}^*(c) & (D). \end{cases} \quad (3.13'')$$

Наконец, при III варианте постановки задачи на каждом шаге мы должны выбрать наибольшее число по формулам (3.12′), (3.13′) и сравнить его с наибольшим числом, найденным по формулам (3.12″), (3.13″). Сопоставив полученные таким образом два значения $Z_k^*(\xi_{k-1})$ выбираем из них наибольшее. Это и есть окончательное выражение для $Z_k^*(\xi_{k-1})$. Одновременно, в зависимости от того, к какому из вариантов относится найденный максимум, устанавливается выгодная на данном шаге очередность пополнения и расхода запасов.

Поскольку выражение (3.12″) содержится среди альтернатив выбора по формуле (3.12′), для k-го шага достаточно производить выбор только по соотношению (3.12′).

Аналогично, так как среди четырех альтернатив в формуле (3.13″) только третья альтернатива отличается от выбираемых по формуле (3.13′), то достаточно производить выбор по формуле (3.13′), добавив пятую альтернативу.

Рассмотрим теперь числовой пример.

Задача 5. Определить оптимальную стратегию в управлении запасами, включая оптимальную очередность пополнения и расходования запасов согласно условиям задачи 4 при следующих данных: $n=5$, $c=50$, α_k и β_k заданы таблично:

Таблица 8

k	1	2	3	4	5
α_k	5	16	12	15	18
β_k	15	10	8	15	22

Решение задачи выполняем по изложенной схеме для III варианта постановки задачи.

Как уже указывалось, на каждом шаге достаточно вычислять значения $Z_k^*(\xi_{k-1})$ только для двух значений параметра ξ_{k-1}.

Для 5-го шага, согласно соотношению (3.12′), имеем

$$Z_5^*(\xi_4)=\max\begin{cases}\beta_5\xi_4 & (B),\\ (\beta_5-\alpha_5)\,c+\alpha_5\xi_4 & (C).\end{cases}$$

Следовательно, наибольшее значение достигается в точке C:

$$Z_5^*(\xi_4)=18\xi_4+200 \text{ при } x_5^*(\xi_4)=50,\ y_5^*(\xi_4)=\xi_4.$$

Выполнение оптимизации на 4-м и последующих шагах проводится по формуле (3.13′) с включением пятой альтернативы.

Для 4-го шага имеем

$$Z_4^*(\xi_3)=\max\begin{cases}18\xi_3+4c\ (A),\\ 15\xi_3+4c\ (B),\\ 15\xi_3+4c\ (C_1),\\ 15\xi_3+7c\ (D),\\ 15\xi_3+7c\ (C_2).\end{cases}$$

При $k=4$ получаем значение $Z_4^*(\xi_3)=15\xi_3+350$, соответствующее точкам D и C_2. Таким образом, на этом шаге получаем альтернативное решение:

$x_4^*(\xi_3)=50-\xi_3$, $y_4^*(\xi_3)=0$ при опережении пополнения

или

$x_4^*(\xi_3)=50$, $y_4^*(\xi_3)=\xi_3$ при опережении расхода.

Аналогично, при $k=3$ имеем $Z_3^*(\xi_2)=12\xi_2+500$ соответственно при $x_3^*(\xi_2)=50-\xi_2$; $y_3^*(\xi_2)=0$.

Расчеты по условной оптимизации удобно располагать в форме таблицы (см. табл. 9), где показана оптимизация 3-го и 2-го шагов. Как обычно, наибольшее число в строке (т. е. при данном ξ) подчеркнуто.

Таблица 9

k	ξ	Вычисление					$Z_k^*(\xi_{k-1})$	$x_k^*(\xi_{k-1})$	$y_k^*(\xi_{k-1})$	Вариант
		A	B	C_1	D	C_2				
3	0	350	350	150	<u>500</u>	500	500	50	0	I, II
	50	1100	750	750	<u>1100</u>	900	1100	0	0	I
2	0	<u>500</u>	500	200	300	300	500	0	0	I
	50	<u>1100</u>	1000	1000	1100	800	1100	0	0	I
1	0	500	500	<u>1000</u>	850	850	1000	50	50	I

Теперь приступим к безусловной оптимизации.

Из 1-го шага сразу получаем $Z_{\max}=1000$ при $x_1^*=50$ и $y_1^*=50$ для I варианта очередности. Тогда, $\xi_1^*=50$, откуда $x_2^*=y_2^*=0$. Соответственно получим $\xi_2^*=50$, при котором $x_3^*=y_3^*=0$ для I варианта; тогда $\xi_3^*=50$. Из результатов оптимизации 4-го шага имеем $x_4^*=y_4^*=0$

для I варианта, или $x_4^*=y_4^*=50$ для II варианта. Наконец, на 5-м шаге получаем $x_5^*=y_5^*=50$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить задачу, аналогичную задаче 1, при следующих условиях: $n=4$, $\xi_0=2$, $\xi_4=0$, $\psi_k(x_k)=5+2x_k$ $(k=1, 2, 3, 4)$, $\varphi(\bar{\xi}_k)=0,4\bar{\xi}_k$, $d_1=6$, $d_2=5$, $d_3=15$, $d_4=20$.

Ежемесячное пополнение запасов не превышает 15 ед.

2. В упр. **1** положить $\xi_0=0$, $\xi_4=5$.

3. В упр. **1** положить

$$\psi(x_k)=\begin{cases}2x_k & \text{при } 0\leqslant x_k\leqslant 5,\\ 3x_k-5 & \text{при } 5\leqslant x_k\leqslant 10,\\ 4x_k-15 & \text{при } x_k\geqslant 10.\end{cases}$$

4. В упр. **1** принять

$$\psi(x_k)=\begin{cases}4x_k & \text{при } 0\leqslant x_k\leqslant 5,\\ 3x_k+5 & \text{при } 5\leqslant x_k\leqslant 15.\end{cases}$$

5. В упр. **1** положить $n=3$, $\xi_0=10$, $\xi_3=0$, $d_1=15$, $d_2=5$, $d_3=10$; $\varphi(\bar{\xi}_k)$ и $\psi(x_k)$ заданы таблично:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(t)$	0	1	3	5	9	18	20	28	40	42	47	55	65	70	90	100
$\psi(t)$	0	—	—	—	—	20	—	—	—	—	30	—	—	—	—	35

Пополнение производится партиями, кратными 5.

6. Решить задачу, аналогичную задаче 4, при следующих условиях: $c=10$, $\xi_0=0$, $\xi_4=0$; α_k и β_k заданы таблично:

k	1	2	3	4
α_k	10	15	10	6
β_k	7	12	9	8

7. В упр. **6** положить $c=12$, $\xi_0=5$.

8. В упр. **6** принять $n=5$, $c=15$, $\xi_0=4$, $\xi_5=10$; α_k и β_k заданы таблично:

k	1	2	3	4	5
α_k	10	18	8	11	12
β_k	15	13	10	7	9

9. Решить упр. 6 при переменной емкости склада: $c_1=14$, $c_2=10$, $c_3=15$, $c_4=9$, $c_5=12$.

10. В задаче 4 считать, что затраты на пополнение $\psi(x_k)$ и хранение $\varphi(\xi_k)$ не пропорциональны соответственно α_k и β_k, а заданы таблично:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(t)$	10	15	20	22	25	27	30	35	45	60
$\psi(t)$	7	12	15	20	25	30	35	39	48	55

11. Предприятие выпускает телевизоры и кинескопы. Фиксированные затраты на выпуск партии кинескопов равны 2500 руб., затраты на выпуск одного кинескопа составляют 8,5 руб. График выпуска телевизоров требует следующего выпуска количества кинескопов в текущем году по месяцам:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
150	250	200	150	110	60	50	110	130	240	300	80

Временем, необходимым для выпуска кинескопов, можно пренебречь. Решение о выпуске кинескопов принимается раз в месяц. Найти наилучшее время для выпуска партий кинескопов и размер этих партий, если в настоящий момент их имеется 10, а в конце года желательно иметь 50.

12. Рассматривается система создания запасов, состоящая из n складов. Требуется перераспределить запасы некоторого продукта между складами так, чтобы минимизировать суммарные транспортные затраты и ожидаемые затраты из-за неудовлетворенного спроса в течение фиксированного периода. Транспортировка продукта возможна между любыми двумя складами. Ввести все необходимые функции и построить динамическую модель данной задачи. Наметить расчетную схему.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧИ О ЗАМЕНЕ

§ 1. Постановка задачи

Одной из важных экономических проблем, с которыми приходится встречаться на практике, является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, производственных зданий, агрегатов, машин и т. д., другими словами, старого оборудования — на новое.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, а вместе с тем снижаются производительность и так называемая ликвидная стоимость.

Наступает момент, когда старое оборудование более выгодно продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат. При этом оборудование можно заменить либо новым оборудованием того же вида, либо новым, более совершенным в техническом отношении, с учетом технического прогресса.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при определении сроков замены может служить либо прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует максимизировать, либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации. Известно, что при заданном плане выпуска продукции максимизация прибыли эквивалентна минимизации затрат. Практически удобнее пользоваться вторым критерием, вводя для учета снижения производительности условно приведенные затраты.

Условимся считать, что решения о замене оборудования принимаются периодически в начале каждого промежутка (года, месяца, недели и т. д.), на которые разбит плановый период. Предположим также, что оборудование может использоваться неограниченно долго, если тратить достаточные суммы на его ремонт.

Основной характеристикой оборудования является его возраст. От возраста оборудования зависят эксплуатационные расходы, затраты на производство, производительность и ликвидная стоимость. Эти показатели изменяются, если учитывать технический прогресс, не только при замене старого оборудования новым, с новыми технико-экономическими характеристиками, но и новым того же типа, еще не использованным. В последнем случае изменение вызвано моральным износом.

Метод ДП обеспечивает единый подход к решению всех видов задач о замене.

При составлении модели ДП мы рассматриваем процесс замены как n-шаговый, разбив весь плановый период на n промежутков. Так как в начале каждого из этих промежутков принимается решение либо о сохранении оборудования, либо о его замене, то управление на k-м шаге ($k=1, \ldots, n$) содержит всего лишь две альтернативные переменные. Обозначим через $u^{с}$ решение, состоящее в сохранении старого оборудования, а через $u^{з}$ — решение, состоящее в замене старого оборудования новым. Функциональные уравнения, благодаря наличию двух альтернативных управлений на каждом шаге, содержат лишь две величины: одна выражает условную прибыль (условные затраты) при управлении $u^{с}$, другая — тот же показатель при управлении $u^{з}$. Условная оптимизация на каждом шаге состоит в вычислении двух величин и в выборе из них наибольшей (наименьшей). Это значительно упрощает расчеты на стадии условной оптимизации и позволяет решать вручную задачи о замене с большим числом шагов.

§ 2. Построение модели ДП для задачи о замене

Рассмотрим две модели ДП задачи о замене оборудования. В одной из них в качестве показателя эффективности выберем прибыль, которую следует максимизировать, в другой — суммарные затраты на эксплуатацию, которые следует минимизировать.

Задача 1. Определить оптимальные сроки замены оборудования в течение n лет, при которых прибыль от эксплуатации оборудования максимальна, если известны: p — начальная стоимость оборудования; $f(t)$ — стоимость производимой продукции на оборудовании возраста t лет; $r(t)$ — ежегодные затраты на эксплуатацию оборудования возраста t лет; $\varphi(t)$ — ликвидная стоимость оборудования возраста t лет.

Рассмотрим n-шаговый процесс, считая k-м шагом номер k-го года от начала эксплуатации ($k=1, 2, \ldots, n$). Выше указывалось, что управление на k-м шаге выбирается из двух возможных решений: $u^{с}$ — сохранить и продолжать использование старого оборудования или $u^{з}$ — заменить оборудование новым.

Будем считать, что в начале планового периода возраст оборудования равен t_0. Состояние ξ_{k-1} системы (оборудования) в начале k-го шага характеризуется одним параметром $\xi_{k-1}=t$ — возрастом оборудования. Для k-го шага параметр состояния t может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, k-1$, т. е. $t \leqslant k-1$.

Если к началу k-го шага система находилась в состоянии $\xi_{k-1}=t$, то под влиянием управления $u^с$ в конце k-го шага она перейдет в состояние $\xi_k=t+1$; возраст оборудования увеличится на один год. Под влиянием управления $u^з$, принятого на k-м шаге, система перейдет в состояние $\xi_k=1$ (замену произвели в начале k-го года; в конце k-го года возраст нового оборудования равен одному году).

Уравнение состояния (1.2) для данного процесса имеет вид

$$\xi_k=\begin{cases}\xi_{k-1}+1 & \text{при } u_k=u^с,\\ 1 & \text{при } u_k=u^з.\end{cases} \tag{4.1}$$

На рис. 8 состояние системы изображается точкой плоскости в системе координат k, t; сплошными стрелками указаны переходы из данного состояния в состоя-

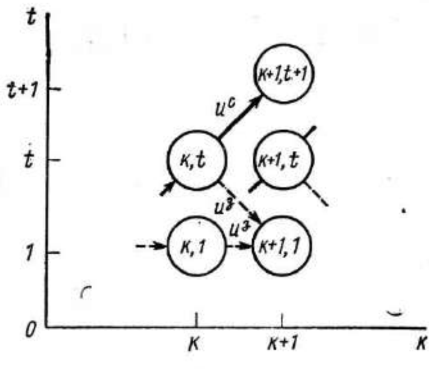

Рис. 8

ние, соответствующее управлению $u^с$, а пунктирными — управлению $u^з$.

Определим прибыль на k-м шаге (показатель эффективности k-го шага), соответствующую каждому из альтернативных управлений $u^с$ и $u^з$. Выбирая на k-м шаге управление $u^с$, мы сможем произвести продукции стоимостью $f(t)$ на старом оборудовании, что потребует затрат $r(t)$, поэтому прибыль равна $f(t)-r(t)$. Обозначим ее через

$$Z_k^с=f(t)-r(t). \tag{4.2}$$

При управлении $u^з$ получим доход $\varphi(t)$ от продажи старого оборудования (ликвидную стоимость) и $f(0)$ от произведенной на новом оборудовании продукции, затратив p на приобретение нового оборудования и $r(0)$ на содержание нового оборудования. В этом случае прибыль (обозначим ее через $Z_k^з$) составляет

$$Z_k^з = \varphi(t) + f(0) - p - r(0). \qquad (4.3)$$

Построим обратную вычислительную схему решения данной задачи методом ДП.

Обозначим через $Z_k^*(t)$ условную максимальную прибыль, полученную за $n-k+1$ шагов использования оборудования с k-го по n-й шаг включительно, если к k-му шагу возраст оборудования составлял $\xi_{k-1}=t$ лет, при условии, что был выбран оптимальный режим эксплуатации. Соответствующее условное оптимальное управление на k-м шаге обозначим через $u_k^*(t)$. Условный максимальный доход за последний n-й промежуток составляет

$$Z_n^*(t) = \max \begin{cases} f(t) + r(t) & \text{при } u_n = u^с, \\ \varphi(t) + f(0) - p - r(0) & \text{при } u_n = u^з. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Сравнив эти две величины для всех возможных значений $t<n$, получим значения $Z_n^*(t)$ и соответствующие значения $u_n^*(t)$. Предположим, что для всех значений $\xi_k = t$ известна максимальная прибыль, полученная за $n-k$ шагов с $(k+1)$-го по n-й включительно. Поэтому основные рекуррентные соотношения можно записать в виде

$$Z_k^*(t) = \max \begin{cases} f(t) - r(t) + Z_{k+1}^*(t+1) & \text{при } u_k = u^с, \\ \varphi(t) + f(0) - p - r(0) + Z_{k+1}^*(1) & \text{при } u_k = u^з. \end{cases} \qquad (4.5)$$

В уравнении (4.5) величина $Z_{k+1}^*(1)$ — условная максимальная прибыль, полученная за $n-k$ шагов, если к началу $(k+1)$-го шага система находилась в состоянии $\xi_k=1$ (возраст оборудования составлял один год).

Процесс условной оптимизации на каждом шаге, начиная с n-го, сводится к сравнению двух величин в уравнениях (4.4) и (4.5) и выбору наибольшей из них. Этап условной оптимизации заканчивается, как обычно, получением последовательностей функций $Z_k^*(t)$ и $u_k^*(t)$.

На этапе безусловной оптимизации для $\xi_0^* = t_0$ (возраст оборудования в начале процесса) получаем $Z_{\max} =$

$=Z_1^*(t_0)$, а далее по цепочке: $u_1^*=u_1^*(t_0)$, из (4.1) находим $\xi_1^*=t_1$, откуда $u_2^*=u_2^*(t_1)$, и т. д. Оптимальное управление $U^*=(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ представляет собой набор управлений $u^с$ и $u^з$.

Замечание. В задаче 1 не рассматривался вопрос о том, что происходит с оборудованием после n лет его эксплуатации. Можно предположить, что n неограниченно велико и, рассматривая процесс для достаточно большого значения n, получить закономерность в оптимальном управлении в виде периодически повторяющихся циклов замены и использования старого оборудования (такой пример будет рассмотрен ниже). Можно также предположить, что после n лет использования оборудование продается и ликвидная стоимость присоединяется к общей прибыли. Во втором случае уравнения (4.4) принимают вид

$$Z_n^*(t)=\max\begin{cases} f(t)-r(t)+\varphi(t+1) & \text{при } u_n=u^с, \\ \varphi(t)-p+f(0)-r(0)+\varphi(1) & \text{при } u_n=u^з. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рассмотрим некоторую модификацию задачи 1.

Задача 2. В задаче 1 предположим, что ежегодные затраты на эксплуатацию, ликвидная и начальная стоимость зависят не только от возраста оборудования t, но и от времени, прошедшего с начала процесса. Пусть $r_k(t)$ — затраты на эксплуатацию в течение k-го года, если со времени последней замены прошло t лет; $\varphi_k(t)$ — ликвидная стоимость оборудования возраста t лет, если оно продается в начале k-го года; p_k — начальная стоимость оборудования, если оно куплено в начале k-го года.

Требуется определить оптимальные сроки замены старого оборудования новым в течение n лет с тем, чтобы минимизировать затраты на его содержание.

Показатель эффективности в данной задаче — суммарные затраты на эксплуатацию оборудования. Затраты на k-м шаге, как и прежде, зависят от выбранного управления. При управлении $u_k=u^с$ эти затраты равны $Z_k^с=r_k(t)$, а при управлении $u_k=u^з$ составляют $Z_k^з=$ $=-\varphi_k(t)+p_k+r_k(0)$.

Пусть $Z_k^*(t)$ — условные минимальные затраты за $n-k+1$ шагов с k-го по n-й включительно, если к началу k-го шага возраст оборудования составлял t лет, при условии, что был выбран оптимальный режим эксплуатации.

Рекуррентные соотношения для $Z_k^*(t)$ имеют вид

$$Z_k^*(t)=\min\begin{cases} r_k(t)+Z_{k+1}^*(t+1) & \text{при } u_k=u^c, \\ p_k+r_k(0)-\varphi_k(t)+Z_{k+1}^*(1) & \text{при } u_k=u^з. \end{cases} \quad (4.7)$$

Для n-го шага соответственно получим

$$Z_n^*(t)=\min\begin{cases} r_n(t) & \text{при } u_n=u^c, \\ p_n+r_n(0)-\varphi_n(t) & \text{при } u_n=u^з. \end{cases} \quad (4.8)$$

Вычислительный процесс строится как и в предыдущей задаче.

Введение в условие задачи функций, оценивающих затраты, выпуск продукции и стоимость, зависящие не только от возраста t, но и непосредственно от k, т. е. от времени, прошедшего с начала процесса, является косвенным способом учета технического прогресса.

Как уже отмечалось неоднократно, модели ДП очень гибки и в смысле возможностей анализа чувствительности к вариации исходных данных, и в смысле возможностей включения в модель различных модификаций задачи. Так, например, аналогичная модель может быть построена для задач, в которых ежегодно рассматривается более двух вариантов управления («сохранение», «замена», «реконструкция» и т. д.). Можно рассматривать задачи, в которых затраты или прибыль зависят не только от возраста оборудования, но и еще от одного параметра, например, времени, прошедшего после восстановительного ремонта, и т. д.

Некоторые типы таких задач содержатся в упражнениях к этой главе. Рассмотренные в настоящем параграфе и предложенные в качестве упражнений задачи с двумя альтернативными управлениями — «замена» или «сохранение» — и одним параметром состояния — «возрастом» оборудования — относятся к одному из немногих случаев, когда при любой длительности планового периода можно получить решение, не применяя ЭВМ. Конечно, если подобные задачи приходится решать часто, то использовать ЭВМ, безусловно, необходимо.

Замечание. Если функции затрат, ликвидная и начальная стоимости в задаче 2 зависят от времени τ, прошедшего с начала эксплуатационного периода, и τ не совпадает с k, то состояние системы следует характеризовать двумя параметрами τ и t.

§ 3. Числовой пример

Решим теперь задачу 2 при заданных конкретных условиях.

Задача. 3. Автомашина эксплуатируется в течение шести лет. В начале каждого года может быть принято решение о замене машины новой. Стоимость новой машины на k-м году эксплуатации составляет $p_k=5000+$ $+500(k-1)$ руб. После t лет эксплуатации машину на k-м году можно продать за $\varphi(t)=p_k\cdot 2^{-t}$ руб. Стоимость содержания машины в течение k-го года составляет $r_k(t)=0{,}1\cdot p_k(t+1)$ руб. Найти оптимальный способ эксплуатации машины: когда нужно заменить машину новой, чтобы суммарные затраты (с учетом затрат на покупку новой машины в начале срока эксплуатации и компенсации за счет заключительной продажи) были минимальны.

Процесс эксплуатации машины является шестишаговым. Состояние ξ_{k-1} системы в начале k-го шага характеризуется одним параметром t — возрастом машины. Уравнение состояния совпадает с (4.1). Управление на каждом шаге состоит в выборе одного из двух решений: $u^с$ — эксплуатировать старую машину; $u^з$ — продать старую машину, купить новую (замена).

Модель ДП задачи совпадает с моделью задачи 2. Основные функциональные уравнения, соответствующие уравнениям (4.7) и (4.8), имеют вид

$$Z_k^*(t)=\min\begin{cases}0{,}1p_k(t+1)+Z_{k+1}^*(t+1) & \text{при } u_k=u^с,\\ p_k(1{,}1-2^{-t})+Z_{k+1}^*(1) & \text{при } u_k=u^з\end{cases}$$

$$(k=1,2,3,4,5);$$

$$Z_6^*(t)=\min\begin{cases}0{,}1p_6(t+1)-p_7 2^{-(t+1)} & \text{при } u_6=u^с,\\ p_6(1{,}1-2^{-t})-0{,}5p_7 & \text{при } u_6=u^з.\end{cases}$$

Запишем последнее уравнение, учитывая заданные в условии функции p_k. Условная оптимизация на 6-м шаге сводится к оптимизации по уравнению

$$Z_6^*(t)=\min\begin{cases}750(t+1)-8000\cdot 2^{-(t+1)} & \text{при } u_6=u^с,\\ 4250-7500\cdot 2^{-t} & \text{при } u_6=u^з\end{cases}$$

для всех $0\leqslant t\leqslant 5$. Оптимизацию проведем в табл. 1.

Таблица 1

t	$750(t+1)-8000\cdot 2^{-(t+1)}$	$4250-7500\cdot 2^{-t}$	$Z_6^*(t)$	$u_6^*(t)$
0	750—4000 =—3250	4250—7500=—3250	—3250	u^c ($u^з$)
1	1500—2000 =—500	4250—3750=500	—500	u^c
2	2250—1000=—1250	4250—1875=2375	1250	u^c
3	3000—500 =2500	4250—937,5=3312,5	2500	u^c
4	3250—250 =3000	4250—468,8=3781,2	3500	u^c
5	4500—125 =4375	4250—234,4=4015,6	4015,6	$u^з$

Условная оптимизация на 5—1-м шагах приведена в табл. 2 согласно уравнениям

$$Z_k^*(t)=\min\begin{cases}50(t+1)(k+9)+Z_{k+1}^*(t+1) & \text{при } u_k=u^c,\\ 500(k+9)(1{,}1-2^{-t})+Z_{k+1}^*(1) & \text{при } u_k=u^з.\end{cases}$$

В 5-м и 8-м столбцах табл. 2 помещены значения

$$Z_k(t,\ u^c)=50(t+1)(k+9)+Z_{k+1}^*(t+1)$$

и

$$Z_k(t,\ u^з)=500(k+9)(1{,}1-2^{-t})+Z_{k+1}^*(1),$$

а в 9-м столбце — минимальное из чисел, стоящих в 5-м и 8-м столбцах.

Безусловная оптимизация: $Z_{\min}=17387{,}5$ руб.

Оптимальное управление: $u_1^*=u^c\to\xi_1^*=t_1=1\to u_2^*=u_2^*(1)=u^c\to\xi_2^*=t_2=2\to u_3^*=u_3^*(2)=u^c\to\xi_3^*=t_3=3\to u_4^*=u_4^*(3)=u^з\to\xi_4^*=t_4=1\to u_5^*=u_5^*(1)=u^c\to\xi_5^*=t_5=2\to u_6^*=u_6^*(2)=u^c$ (в этой цепочке использовались уравнения состояния (4.1) и последние столбцы табл. 2 и 1).

Оптимальное управление: $U^*=(u^c,\ u^c,\ u^c,\ u^з,\ u^c,\ u^c)$.

Следовательно, купленную автомашину следует эксплуатировать в течение трех лет, на 4-м году заменить новой и продолжать использовать оставшееся время. Оп-

Таблица 2

k	t $(t<k)$	$50(t+1)\times$ $\times(k+9)$	$Z^{*}_{k+1}(t+1)$	$Z_k(t, u^{\text{с}})$	$500(k+9)(1{,}1-2^{-t})$	$Z^{*}_{k+1}(1)$	$Z_k(t, u^{\text{з}})$	$Z^{*}_k(t)$	$u^{*}_k(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0	700	—500	200	7700—7000=700	—500	200	200	$u^{\text{с}}(u^{\text{з}})$
	1	1400	1250	2650	7700—3500=4200	—500	3700	2650	$u^{\text{с}}$
	2	2100	2500	4600	7700—1750=5950	—500	5450	4600	$u^{\text{с}}$
	3	2800	3500	6300	7700—875 =6825	—500	6325	6300	$u^{\text{с}}$
	4	3500	4015,6	7515,6	7700—437,5=7262,5	—500	6762,5	6762,5	$u^{\text{з}}$
4	0	650	2650	3300	7150—6500=650	2650	3300	3300	$u^{\text{с}}(u^{\text{з}})$
	1	1300	4600	5900	7150—3250=3900	2650	6550	5900	$u^{\text{с}}$
	2	1950	6300	8250	7150—1625=5525	2650	8175	8175	$u^{\text{з}}$
	3	2600	6762,5	9362,5	7150—812,5=6337,5	2650	8987,5	8987,5	$u^{\text{з}}$
3	0	600	5900	6500	6600—6000=600	5900	6500	6500	$u^{\text{с}}(u^{\text{з}})$
	1	1200	8175	9375	6600—3000=3600	5900	9500	9375	$u^{\text{с}}$
	2	1800	8987,5	10787,5	6600—1500=5100	5900	11000	10787,5	$u^{\text{с}}$
2	0	550	9375	9925	6050—5500=550	9375	9925	9925	$u^{\text{с}}(u^{\text{з}})$
	1	1100	10787,5	11887,5	6050—2750=3300	9375	12675	11887,5	$u^{\text{с}}$
1	0	5500	11887,5	17387,5				17387,5	$u^{\text{с}}$

тимальный режим эксплуатации автомашины соответствует траектории, изображенной на рис. 9 двумя сплошными линиями.

§ 4. Графическое решение задачи о замене

В задачах, в которых число шагов k невелико, можно непосредственно использовать рисунок для решения функциональных уравнений на стадиях условной и безусловной оптимизации. Это будет сделано в задаче 4, динамическая модель которой в общем-то совпадает с моделью задачи 2.

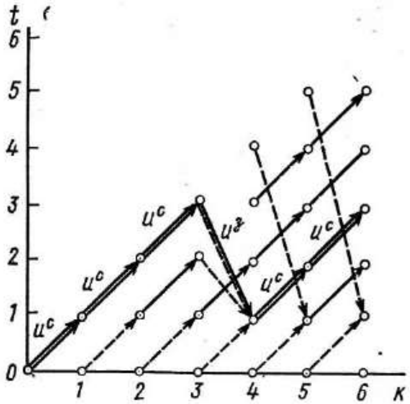

Рис. 9

Задача 4. Оборудование эксплуатируется в течение n лет, после чего полностью заменяется новым. В какие-то моменты времени, например в начале года, можно производить профилактический ремонт оборудования. Затраты f на ремонт зависят от состояния оборудования, которое характеризуется возрастом τ оборудования и количеством лет t, прошедших со времени последнего ремонта (если он был произведен). Пусть $f(\tau, t)$ — функция затрат на ремонт. Эксплуатационные расходы в течение ближайшего года зависят от тех же параметров. Обозначим функцию эксплуатационных издержек через $r(\tau, t)$. Если к моменту τ ремонт не производился, то затраты на ремонт и эксплуатацию характеризуются функциями $f_0(\tau)$ и $r_0(\tau)$.

Требуется распределить профилактические ремонты по годам так, чтобы общая сумма затрат (эксплуатационные расходы плюс расходы на ремонт, если он производился) была минимальна.

Функции $f_0(\tau)$, $r_0(\tau)$, $f(\tau, t)$, $r(\tau, t)$ заданы следующими таблицами (табл. 3 и 4):

Таблица 3

	τ	0	1	2	3	4	5
$f_0(\tau)$	—	0	1,0	1,5	2,1	3,1	5,0
	$t \diagdown \tau$	0	1	2	3	4	5
$f(\tau, t)$	1	—	—	1	1,8	2,8	3,0
	2	—	—	—	2,3	3,1	4,0
	3	—	—	—	—	3,5	4,3
	4	—	—	—	—	—	4,5

Таблица 4

	τ	0	1	2	3	4	5
$r_0(\tau)$	—	2	2,5	3,3	4,6	7,2	10,5
	$t \diagdown \tau$	0	1	2	3	4	5
$r(\tau, t)$	0	—	2,0	2,5	2,8	3,2	4,1
	1	—	—	3,0	3,1	3,6	4,4
	2	—	—	—	3,8	4,5	5,2
	3	—	—	—	—	6,5	7,1
	4	—	—	—	—	—	8,8

Состояние системы будем характеризовать двумя фазовыми координатами τ и t и изображать его точкой $\xi=(\tau;\ t)$ фазовой плоскости: по оси абсцисс откладывается возраст оборудования τ, а по оси ординат — время t, прошедшее с момента последнего ремонта (рис. 10). Точки на оси τ соответствуют состояниям системы, которые она принимает, если за время эксплуатации не было ни одного ремонта. Состояние начала эксплуатации соответствует точке $\xi=(0;\ 0)$, конец — точкам $\xi=(6;\ t)$, т. е. $\{(6;\ t)\}=\Omega_{\text{кон}}$. Любая траектория, переводящая точку ξ из ξ_0 в $\Omega_{\text{кон}}$, состоит из отрезков — шагов, соответствующих годам эксплуатации оборудования. Надо выбрать такую траекторию, при которой затраты на эксплуатацию оборудования минимальны.

Пусть, как и прежде, для любого состояния $\xi=(\tau;\ t)$ системы в начале каждого шага есть выбор между двумя управлениями: не делать ремонт, использовать имеющееся оборудование (обозначим это управление, как и прежде, через $u^{с}$); сделать ремонт и эксплуатировать обновленное оборудование — $u^{з}$.

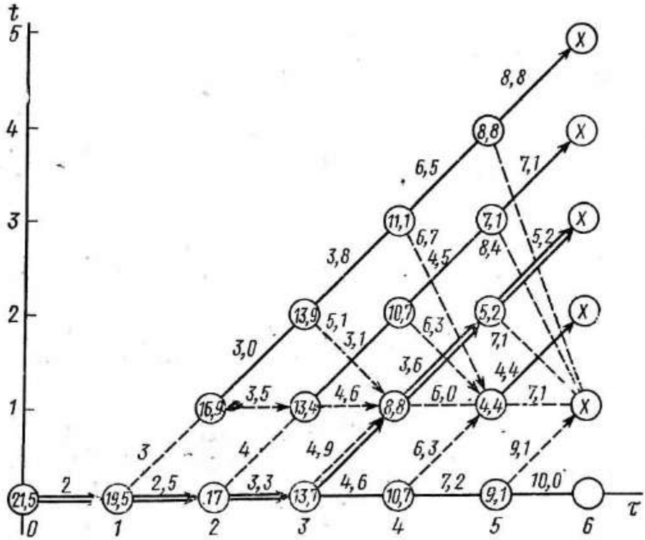

Рис. 10

Рассмотрим два случая.

1. Точка ξ находится на оси τ — в состоянии $(\tau;\ 0)$. Под влиянием управления $u^{с}$ за год она переместится в состояние с координатами $(\tau+1;\ 0)$. Затраты на эксплуатацию за год составят $r_0(\tau)$. Описанное изменение состояния системы обозначим на рис. 10 отрезком, соединяющим точки $(\tau;\ 0)$ и $(\tau+1;\ 0)$; над отрезком запишем соответствующие затраты, в данном случае это $r_0(\tau)$. Состояния системы на рис. 10 изображены кружками, в которых в дальнейшем мы будем проставлять затраты, полученные на стадии условной оптимизации.

Под влиянием управления $u^{з}$ система перейдет из состояния $(\tau;\ 0)$ в состояние $(\tau+1;\ 1)$. Соединим эти точки отрезком, над которым проставим затраты, равные стоимости ремонта в рассматриваемом году плюс стоимость эксплуатации: $f_0(\tau)+r(\tau,\ 0)$.

2. Пусть система находится в состоянии $\xi=(\tau, t)$, $t>0$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем: $\xi'(u^c)=(\tau+1, t+1)$ при затратах $r(\tau, t)$; $\xi'(u^з)=(\tau+1, 1)$ при затратах $f(\tau, t)+r(\tau, 0)$.

Используя табл. 3 и 4, разметим отрезки, соответствующие возможным переходам из состояния ξ в состояние ξ' на рис. 10. Например, над отрезком, соединяющим точки $\xi=(3; 2)$ и $\xi'=(4; 1)$, стоит число 5,1; это — сумма затрат на ремонт, составляющих 2,3 (см. табл. 3), и затрат на эксплуатацию на 4-м году, если после ремонта прошло 0 лет, составляющих 2,8 (см. табл. 4).

Условную оптимизацию проведем на получившейся сети (рис. 10).

Проведем оптимизацию 6-го шага. Конечные состояния системы известны — точки $(6; t)$. Анализируем, каким образом можно попасть в каждое конечное состояние. Для этого рассмотрим все возможные состояния, которые возникают после 5-го шага.

Состояние (5; 0). Из него можно попасть в (6; 0), произведя затраты, равные 10 (только эксплуатация), и в состояние (6; 1) с затратами 9,1 (ремонт и последующая эксплуатация). Отсюда вытекает, что если предпоследний шаг привел в точку (5; 0), то следует идти в точку (6; 1) (укажем это направление стрелкой), а минимальные (неизбежные) затраты, соответствующие этому переходу, равны 9,1 [поместим эту величину в кружке точки (5; 0)].

Состояние (5; 1). Из него можно попасть в точку (6; 1) с затратами $3+4{,}1=7{,}1$ и в точку (6; 2) с затратами 4,4. Выбираем второе управление, отмечаем его стрелкой, а минимальные расходы проставляем в кружке точки (5; 1).

Рассуждая таким же образом для каждой точки предпоследнего шага, мы найдем для любого исхода 5-го шага условное оптимальное управление на 6-м шаге, отметим его на рис. 10 стрелками и, кроме того, условные минимальные затраты на последнем шаге проставим в соответствующем кружке.

На этом шаге условной оптимизации для $k=6$ графически решались уравнения

$$Z_6^*(t)=\min\begin{cases} r(5, t) & \text{при } u_6=u^c, \\ f(5, t)+r(5, 0) & \text{при } u_6=u^з \end{cases} (t=1, 2, 3, 4);$$

а при $t=0$ — уравнения

$$Z_6^*(0)=\min\begin{cases} r_0(5) & \text{при } u_6=u^{\text{с}},\\ f_0(5)+r(5,\ 0) & \text{при } u_6=u^{\text{з}}.\end{cases}$$

Далее, планируем 4-й шаг, анализируя каждое состояние, в котором может оказаться система в конце 4-го шага, с учетом оптимального продолжения до конца процесса.

Если начало 5-го шага соответствует точке (4; 0), то при управлении $u^{\text{с}}$ система переходит в точку (5; 0), затраты на этом шаге равны 7,2, а суммарные затраты на два последних шага составляют $7{,}2+9{,}1=16$. При управлении $u^{\text{з}}$ затраты равны $3{,}1+3{,}2=6{,}3$, а расход средств на последних двух шагах равен $6{,}3+4{,}4=10{,}7$. Выбираем минимальный расход 10,7, ставим его в кружок точки (4; 0), а соответствующее управление на этом шаге помечаем стрелкой, ведущей из состояния (4; 0) в состояние (5; 1). Так поступаем для каждого состояния (4; t) (см. рис. 10).

На этом этапе графически решались уравнения

$$Z_5^*(0)=\min\begin{cases} r_0(4)+Z_6^*(0) & \text{при } u_5=u^{\text{с}},\\ f_0(4)+r(4,\ 0)+Z_6^*(1) & \text{при } u_5=u^{\text{з}}\end{cases}$$

и

$$Z_5^*(t)=\min\begin{cases} r(4,\ t)+Z_6^*(t+1) & \text{при } u_5=u^{\text{с}},\\ f_0(4,\ t)+r(4,\ 0)+Z_6^*(1) & \text{при } u_5=u^{\text{з}}.\end{cases}$$

Продолжая условную оптимизацию для 4, 3, 2 и 1-го шагов, мы получим на рис. 10 следующую ситуацию: из каждой точки (состояния) выходит стрелка, указывающая, куда следует перемещаться на данном шаге, а в кружках записаны минимальные затраты на переход из этой точки в конечное состояние (т. е. затраты на эксплуатацию оборудования, начиная с этого состояния до конца).

На каждом шаге графически решались функциональные уравнения

$$Z_k^*(0)=\min\begin{cases} r_0(k-1)+Z_{k+1}^*(0) & \text{при } u^{\text{с}},\\ f_0(k-1)+r(k-1,\ 0)+Z_{k+1}^*(1) & \text{при } u^{\text{з}}\end{cases}$$

и

$$Z_k^*(t)=\min\begin{cases}r(k-1,t)+Z_{k+1}^*(t+1) & \text{при } u^{с},\\ f(k-1,t)+r(k-1,\ 0)+Z_{k+1}^*(1) & \text{при } u^{з}.\end{cases}$$

После проведения условной оптимизации получим в точке (0; 0) минимальные затраты на эксплуатацию оборудования: $Z_{\min}=21{,}5$. Далее строим оптимальную траекторию точки ξ, перемещаясь из $\xi_0=(0;\ 0)$ по стрелкам в $\Omega_{\text{кон}}$. Получаем набор точек: (0; 0), (1; 0), (2; 0), (3; 0), (4; 1), (5; 2), (6; 3), который соответствует оптимальному управлению $U^*=(\ u^{с},\ u^{с},\ u^{с},\ u^{з},\ u^{с},\ u^{с})$. Оптимальный режим эксплуатации состоит в том, чтобы сделать профилактический ремонт в начале 4-го года.

Таким образом, рисунок (график) позволяет не только наглядно интерпретировать расчетную схему, но и, при надлежащей разметке, решить задачу методом ДП *.

§ 5. Бесконечношаговая модель задачи о замене

В заключение главы рассмотрим задачу определения оптимальной стратегии замены оборудования при бесконечном плановом периоде.

Задача 5. Определить оптимальные сроки замены оборудования при неограниченном времени его использования, если известны: p — начальная стоимость; $r(t)$ — эксплуатационные затраты на содержание оборудования возраста t лет в течение ближайшего года; $\varphi(t)$ — ликвидная стоимость оборудования возраста t лет.

В задаче будем минимизировать затраты. Параметр состояния есть время: $\xi=t$. Процесс является бесконечным, поэтому условные минимальные затраты $Z_k^*(t)$ за все последующее время, начиная с k-го года, зависят только от $\xi_{k-1}=t$ и не зависят от k.

При рассмотрении бесконечного процесса необходимо ввести так называемый *дисконтирующий множитель* $0<\alpha<1$, позволяющий привести сумму в последующий момент времени к настоящему моменту с учетом ежегодного роста по правилу сложных процентов. Если имеется первоначальная сумма a руб., то через n лет она составит, при процентной ставке в $p\%$, сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

* См. далее задачу о выборе кратчайшего маршрута.

руб. Наоборот, конечную сумму a руб. через n лет можно получить от первоначальной суммы $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-n}$ руб. Множитель $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-1}=\alpha$ называется *коэффициентом дисконтирования.*

Учитывая этот множитель и повторяя весь ход рассуждений, изложенный в предыдущих задачах, получим следующие функциональные уравнения:

$$Z^*(t)=\min\begin{cases} r(t)+\alpha Z^*(t+1) \text{ при сохранении,} \\ r(0)+\alpha Z^*(1)+p-\varphi(t) \text{ при замене.}\end{cases} \quad (4.9)$$

Поскольку конечного шага нет, обратный ход выполнить нельзя, поэтому решим уравнения явно следующим образом.

Для 1-го шага имеем $\xi_0=1$, поэтому

$$Z^*(0)=\min\begin{cases} r(0)+\alpha Z^*(1) \text{ при сохранении,} \\ r(0)+\alpha Z^*(1)+p-\varphi(0) \text{ при замене.}\end{cases}$$

Так как $p-\varphi(0)>0$, то выражение, стоящее в первой строке, всегда не больше выражения во второй строке. Поэтому $Z_0^*(0)=r(0)+\alpha Z_1^*$, что соответствует сохранению оборудования.

Пусть оптимальным является решение о сохранении для первых N шагов и о замене на $(N+1)$-м шаге. Задача состоит в определении этого числа N. Запишем последовательность рекуррентных соотношений для этих N шагов:

$$\begin{gathered} Z^*(0)=r(0)+\alpha Z^*(1), \\ Z^*(1)=r(1)+\alpha Z^*(2), \\ Z^*(2)=r(2)+\alpha Z^*(3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z^*(N-1)=r(N-1)+\alpha Z^*(N). \end{gathered}$$

Исключив из этих равенств последовательно $Z^*(2)$, $Z^*(3)$, ..., получим

$$Z^*(0)=r(0)+\alpha r(1)+\alpha^2 r(2)+\ldots+\alpha^N Z^*(N). \quad (4.10)$$

Но для $(N+1)$-го шага по предположению оптимальным является решение о замене оборудования, следовательно,

$$Z^*(N)=r(0)+p-\varphi(N)+\alpha Z^*(1)=$$
$$=r(0)+p-\varphi(N)+Z^*(0)-r(0),$$

откуда

$$Z^*(N)=p-\varphi(N)+Z^*(0).$$

Подставляя значение $Z^*(N)$ в равенство (4.10) и разрешая полученное при этом уравнение относительно $Z^*(0)$, найдем

$$Z^*(0)=\frac{1}{1-\alpha^N}\{r(0)+\alpha r(1)+\ldots+\alpha^{N-1}r(N-1)+$$
$$+\alpha^N[p-\varphi(N)]\}. \qquad (4.11)$$

Величина $Z^*(0)$ равна необходимому минимуму затрат на весь процесс. Теперь, полагая последовательно $N=1, 2, 3, \ldots$, вычисляем значение $Z^*(0)$ и находим среди них наименьшее.

Задача 6. Решить задачу 5 при следующих условиях: $p=100$; $\alpha=0{,}9$, $r(t)=30-\frac{12}{t+1}$, а $\varphi(t)$ задана в табл. 5:

Таблица 5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(t)$	80	75	65	55	45	25	15	15	10	2

Используя уравнение (4.11), определим значение $Z^*(0)$ — необходимый минимум затрат и соответствующее значение N, при котором достигается этот минимум.

Полагаем в уравнении (4.11) последовательно $N=1, 2, 3, \ldots$. Предварительно найдем значения функций $r(t)=30-\frac{12}{t+1}$ и $\alpha^t r(t)$ (табл. 6)

Таблица 6

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$r(t)$	18	24	26	27	27,6	28	28,3	28,5
$(0{,}9)^t\cdot r(t)$	18	21.6	21,06	19,44	17,94	16,52	15,0	13,40

Все необходимые вычисления приведены в табл. 7.

Таблица 7

N	$r(0)$	$0{,}9\times r(1)$	$0{,}9^2\times r(2)$	$0{,}9^3\times r(3)$	$0{,}9^4\times r(4)$	$0{,}9^5\times r(5)$	$0{,}9^N\times(p-\varphi(N))$	$\sum$	$\frac{1}{1-0{,}9^N}$	$Z^*(0)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18						18	36	10	360
2	18	21,6	21,06				20,25	59,85	5,26	314,81
3	18	21,6	21,06				25,20	85,86	3,57	306,52
4	18	21,6	21,06	19,44			29,25	109,35	2,86	312,74
5	18	21,6	21,06	19,44	17,94		35,40	133,44	2,44	325,59
6	18	21,6		19,44	17,94	16,52	39,75	154,31	2,13	328,68

Числа в 8-м столбце, равные сумме чисел столбцов с 1-го по 7-й, являются значением выражения, стоящего в фигурных скобках в равенстве (4.11), для $N=1, 2, 3, \ldots$. Наименьшее значение $Z_{\min}=306{,}52$ достигается при $N=3$, т. е. в течение трех шагов следует сохранить оборудование, а на 4-м шаге заменить его новым. Таков оптимальный режим замены оборудования в этом случае.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить задачу 1, если $n=12$; $p=10$, $\varphi(t)=0$, а разность $f(t)-r(t)=q(t)$ задана таблично:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

2. Выполнить упр. **1** при условии, что покупная цена p возрастает по следующему закону:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(t)$	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15

3. Выполнить упр. 2 при условии, что ликвидная стоимость оборудования изменяется по следующему закону:

t	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(t)$	5	4	3	2	1	0	0

4. Решить задачу 1, если $n=12$, $p=10$, а функции $f(t)$, $\varphi(t)$ и $r(t)$ заданы таблично:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	36	36	36	36	35	35	35	34	34	33	33	31	29
$\varphi(t)$	10	11	12	12	12	13	13	14	14	14	15	16	16
$r(t)$	10	6	5	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0

5. Выполнить упр. 4, если $\varphi(t)=0$.

6. Выполнить упр. 4, если $n=8$, $t_0=3$ (оборудование начали эксплуатировать в возрасте трех лет).

7. Решить задачу 1, если $n=10$, $t_0=0$, $p=12$,

$$f(t)=30-t,\ r(t)=10+0{,}5t,\ \varphi(t)=\begin{cases}10 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 2 \text{ при } 6\leqslant t\leqslant 10.\end{cases}$$

8. Построить модель ДП задачи 1 при условии, что оборудование может заменяться не новым, а уже бывшим в использовании q лет. При этом заданы: $p_k(q)$ — покупная цена оборудования, если на k-м году покупается оборудование возраста q лет ($q=0, 1, \dots <t$) и $\varphi_k(q, t)$ — ликвидная стоимость оборудования, если его возраст при покупке равен q лет и оно еще эксплуатировалось t лет.

9. Решить задачу, аналогичную задаче 3, если покупная цена автомобиля постоянна: $p=4000$ руб., ликвидная стоимость после t лет эксплуатации составляет $\varphi(t)=4000\cdot 2^{-t}$. Затраты на эксплуатацию машины возраста t лет в течение ближайшего года равны $r(t)=600(t+1)$. В конце n-годичного периода машина продается. Рассмотреть случаи: а) $n=6$; б) $n=10$ в) $n=\infty$. Дать графический анализ задачи.

10. Решить задачу 3 при условии, что автомашина может заменяться не новой, а бывшей в эксплуатации q лет. При этом заданы: $p_k(q)=p_k(0)2^{-q}$ — покупная цена машины возраста q лет; $p_k(0)=5000+500(k-1)$ — начальная покупная цена машины в k-м году; $r_k(t, q)=0{,}1p_k(q)(t+1)$ — затраты на эксплуатацию в течение k-го года, если машина возраста q эксплуатируется ещё t лет; $\varphi_k(t, q)=p_k(q)2^{-t}$ — ликвидная стоимость машины в k-м году, если при покупке она имела возраст q и эксплуатировалась еще t лет.

11. Составить модель ДП для решения задачи, аналогичной задаче 2, при условии, что кроме управлений «сохранение» и «замена», на каждом шаге возможно третье решение — «капитальный ремонт», и предполагая, что после него оборудование можно рассматривать как новое. Стоимость капитального ремонта равна $f(t)$.

12. Решить задачу, аналогичную задаче 4, если функции $f_0(t)$, $r_0(t)$, $f_k(\tau, t)$, $r_k(\tau, t)$ заданы таблично:

	τ	0	1	2	3	4	5
$f_0(\tau)$		—	1,2	1,7	2,4	3,5	5,6
$f(\tau,t)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	1	—	—	1,2	2,0	3,2	4,8
	2	—	—	—	2,5	3,6	5,0
	3	—	—	—	—	4,0	5,2
	4	—	—	—	—	—	5,4

	τ	0	1	2	3	4	5
$r_0(\tau)$		2,2	2,8	4,3	5,9	10,0	12,8
$r(\tau,t)$	$t \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
	0	—	2,2	2,8	4,5	7,0	7,2
	1	—	—	3,2	5,1	7,2	7,4
	2	—	—	—	5,8	7,8	8,0
	3	—	—	—	—	8,0	8,2
	4	—	—	—	—	—	8,5

13. Решить задачу, аналогичную задаче 5, при следующих данных: $p_0=6000$; $r(t)=800\ (t+1)$; $\varphi(t)=p_0\cdot 2^{-t}$; $\alpha=0{,}9$.

14. Решить задачу, аналогичную задаче 5, при следующих данных: $p=5000$; $r(t)=5000(1-2^{-t})$; $\alpha=0{,}8$, а функция $\varphi(t)$ задана таблично:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(t)$	3000	2500	1500	1000	800	700	700	500	200	50

ГЛАВА V

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Задачи с мультипликативным критерием

До сих пор рассматривались модели ДП, в которых целевая функция Z складывалась из показателей эффективности $f_k(u_k)$ на отдельных шагах:

$$Z=\sum_{k=1}^{n} f_k(u_k), \tag{5.1}$$

т. е. являлась аддитивной. В некоторых задачах целевая функция может представлять собой произведение:

$$Z=\prod_{k=1}^{n} f_k(u_k). \tag{5.2}$$

Такая функция называется *мультипликативной.* В § 1 гл. I было отмечено, что, логарифмируя функцию (5.2), можно перейти к функции вида (5.1). Однако прямой необходимости в этом переходе нет, так как схема ДП применима и для мультипликативных целевых функций.

Рассмотрим n-шаговую задачу максимизации функции (5.2) с параметрами состояния ξ_k и переменными управления u_k ($k=1, 2, \ldots, n$). Подобно тому, как это было сделано в § 2 гл. I при построении модели ДП, введем в рассмотрение функции $Z_k^*(\xi_{k-1})$ — условные максимумы показателя эффективности на $n-k+1$ шагах, начиная с k-го по n-й включительно. Повторив рассуждения § 2 гл. I и использовав принцип оптимальности, получим уравнения Беллмана в следующем виде:

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{u_k \in D_k}\{f_k(u_k)Z_{k+1}^*(\xi_k)\} \tag{5.3}$$

для $k=1, 2, \ldots, n-1$, а для n-го шага уравнение сохранит прежний вид (1.9):

$$Z_n^*(\xi_{n-1})=\max_{u_n \in D_n} f_n(u_n). \tag{5.4}$$

Вычисления, как и прежде, проводятся в два этапа. На этапе условной оптимизации последовательно решают уравнения (5.4) и (5.3), получают функции $Z_k^*(\xi_{k-1})$ и $u_k^*(\xi_{k-1})$ для любых ξ_{k-1} и для всех k. Этап безусловной оптимизации совпадает с приведенным в гл. I.

Рассмотрим конкретную модель задачи с мультипликативным критерием.

Задача 1. Срочный заказ по изготовлению восьми машин необходимо разместить между четырьмя предприятиями. Вероятности выполнения заказа k-м предприятием равны P_k ($k=1, 2, 3, 4$), зависят от величины заказа и заданы в табл. 1:

Таблица 1

P_k \ Число машин	1	2	3	4	5	6	7	8
P_1	0,9	0,7	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1
P_2	0,8	0,7	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1
P_3	0,7	0,6	0,5	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1
P_4	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0,2	0,2	0,1

Найти оптимальный план размещения заказа, при котором достигает максимума вероятность P выполнения заказа всеми предприятиями.

Рассмотрим четырехшаговый процесс. Переменные управления u_k — число машин, планируемых k-му предприятию ($k=1, 2, 3, 4$). Вероятности $P_k(u_k)$ заданы в табл. 1. Параметр состояния ξ_{k-1} в начале k-го шага — остаток еще не размещенного заказа; ясно, что $\xi_0=8$. Уравнения состояния имеют вид

$$\xi_k=\xi_{k-1}-u_k. \tag{5.5}$$

Показатель эффективности для всего процесса планирования — вероятность P выполнения заказа всеми предприятиями — равен произведению вероятностей $P_k(u_k)$:

$$Z=P=P_1(u_1)P_2(u_2)P_3(u_3)P_4(u_4). \tag{5.6}$$

Положим $P_k(0)=1$ для всех k. Уравнения (5.3) и (5.4) запишутся в виде

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{0<u_k<\xi_{k-1}}\{P_k(u_k)Z_{k+1}^*(\xi_k)\} \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{5.7}$$

и

$$Z_4^*(\xi_3)=\max_{0<u_4<\xi_3} P_4(u_4). \tag{5.8}$$

Таблица 2 (основная)

ξ_{k-1}	$k=4$		$k=3$		$k=2$	
	$u_4^*(\xi_3)$	$Z_4^*(\xi_3)$	$u_3^*(\xi_2)$	$Z_3^*(\xi_2)$	$u_2^*(\xi_1)$	$Z_2^*(\xi_1)$
0	0	1	0	1	0	1
1	1	0,9	0	0,9	0	0,9
2	2	0,8	0	0,8	0	0,8
3	3	0,6	0	0,6	1	0,64
4	4	0,4	2	0,48	2	0,56
5	5	0,2	3	0,40	2	0,42
6	6	0,2	3	0,30	2	0,376
7	7	0,1	3	0,20	2	0,28
8	8	0,1	3	0,15	6	0,24

Таблица 3

$\xi_k - 1$	u_k	$\xi_k = \xi_k - 1 - u_k$	$Z_3^*(\xi_2)$			$Z_2^*(\xi_1)$			$Z_1^*(\xi_0)$		
			$P_3(u_3)$	$Z_4^*(\xi_3)$	$Z_3(u_3, \xi_2)$	$P_2(u_2)$	$Z_3^*(\xi_2)$	$Z_2(u_2, \xi_1)$	$P_1(u_1)$	$Z_2^*(\xi_1)$	$Z_1(u_1, \xi_0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1	1	0,9	$\underline{0,9}$	1	0,9	$\underline{0,9}$			
	1	0	0,7	1,0	0,7	0,8	1,0	0,8			
2	0	2	1	0,8	$\underline{0,8}$	1	0,8	$\underline{0,8}$			
	1	1	0,7	0,9	0,63	0,8	0,9	0,72			
	2	0	0,6	1,0	0,6	0,7	1,0	0,7			
3	0	3	1	0,6	$\underline{0,6}$	1	0,6	0,6			
	1	2	0,7	0,8	0,56	0,8	0,8	$\underline{0,64}$			
	2	1	0,6	0,9	0,54	0,7	0,9	0,63			
	3	0	0,5	1,0	0,5	0,5	1,0	0,5			
4	0	4	1,0	0,4	0,4	1	0,48	0,48			
	1	3	0,7	0,6	0,42	0,8	0,6	0,48			
	2	2	0,6	0,8	$\underline{0,48}$	0,7	0,8	$\underline{0,56}$			
	3	1	0,5	0,9	0,45	0,5	0,9	0,45			
	4	0	0,2	1,0	0,20	0,4	1,0	0,40			
5	0	5	1	0,2	0,2	1	0,40	0,40			
	1	4	0,7	0,4	0,28	0,8	0,48	0,384			
	2	3	0,6	0,6	0,36	0,7	0,6	$\underline{0,42}$			
	3	2	0,5	0,8	$\underline{0,40}$	0,5	0,8	0,40			
	4	1	0,2	0,9	0,18	0,4	0,9	0,36			
	5	0	0,2	1,0	0,2	0,3	1,0	0,30			
6	0	6	1	0,2	0,2	1	0,3	0,3			
	1	5	0,7	0,2	0,14	0,8	0,4	0,24			
	2	4	0,6	0,4	0,24	0,7	0,48	$\underline{0,376}$			
	3	3	0,5	0,6	$\underline{0,30}$	0,5	0,6	0,30			
	4	2	0,2	0,8	0,16	0,4	0,8	0,32			
	5	1	0,2	0,9	0,18	0,3	0,9	0,27			
	6	0	0,1	1,0	0,10	0,3	1,0	0,30			
7	0	7	1	0,1	0,1	1	0,2	0,2			
	1	6	0,7	0,2	0,14	0,8	0,3	0,24			
	2	5	0,6	0,2	0,12	0,7	0,4	$\underline{0,28}$			
	3	4	0,5	0,4	$\underline{0,20}$	0,5	0,48	0,24			
	4	3	0,2	0,6	0,12	0,4	0,6	0,24			
	5	2	0,2	0,8	0,16	0,3	0,8	0,24			
	6	1	0,1	0,9	0,09	0,3	0,9	0,27			
	7	0	0,1	1,0	0,10	0,2	1,0	0,20			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	0	8	1	0,1	0,1	1	0,12	0,12	1	0,24	0,24
	1	7	0,7	0,1	0,07	0,8	0,20	0,16	0,9	0,28	0,252
	2	6	0,6	0,2	$\underline{0,12}$	0,7	0,3	0,21	0,7	0,376	$\underline{0,263}$
	3	5	0,5	0,2	0,10	0,5	0,4	0,20	0,4	0,42	0,168
	4	4	0,2	0,4	0,08	0,4	0,48	0,19	0,3	0,56	0,168
	5	3	0,2	0,6	$\underline{0,12}$	0,3	0,6	0,18	0,3	0,64	0,192
	6	2	0,1	0,8	0,08	0,3	0,8	$\underline{0,24}$	0,2	0,8	0,16
	7	1	0,1	0,9	0,09	0,2	0,9	0,18	0,2	0,9	0,18
	8	0	0,1	1,0	0,10	0,1	1,0	0,10	0,1	1,0	0,10

Для 4-го шага следует считать $u_4=\xi_3$ (остаток машин ξ_3 должен быть полностью спланирован 4-му предприятию), поэтому $Z_4^*(\xi_3)=P_4(\xi_3)$. Эту функцию, заданную в последней строке табл. 1, переносим полностью в основную таблицу (см. табл. 2).

Условную оптимизацию 3, 2 и 1-го шагов выполним во вспомогательной таблице (см. табл. 3). Выражение, стоящее в фигурных скобках в равенстве (5.7), обозначено через $Z_k(u_k, \xi_{k-1})$. Первые три столбца табл. 3, как и раньше,— общие для всех шагов, далее в трех столбцах проводятся расчеты по уравнениям (5.7) для $k=3$ и т. д. Для $k=1$ расчеты сделаны лишь при $\xi_0=8$. В результате получаем $Z_{\max}=0{,}263$, $u_1^*=2$. Используя уравнение состояния (5.5) и основную табл. 2, в которую из табл. 3 вносились результаты пошаговой оптимизации, находим оптимальное управление:

$$\xi_1^*=6,\ u_2^*=2,\ \xi_2^*=4,\ u_3^*=2,\ \xi_3^*=2,\ u_4^*=2,$$
$$U^*=(2,\ 2,\ 2,\ 2).$$

Таким образом, наибольшая вероятность выполнения заказа по изготовлению восьми машин четырьмя предприятиями составит $P=0{,}263$, если каждому предприятию будет заказано две машины.

§ 2. Задачи целочисленного программирования

Известно, с какими трудностями приходится встречаться при решении даже линейных задач, если в модель включено требование целочисленности переменных. Например, метод сечений Гомори связан с построением последовательности симплексных таблиц и требует весьма громоздких вычислений. Если же целевая функция нелинейная, то использование метода сечений вообще невозможно. В противоположность этому вычислительные методы ДП предполагают дискретность, а при соответствующем изменении масштаба — целочисленность переменных и почти безразличны к виду целевой функции. Поэтому методы ДП можно применять для решения некоторых задач целочисленного программирования. По существу, большинство задач, рассмотренных выше, относились к задачам целочисленного программирования. Вместе с тем методы ДП требуют аддитивной (или мультипликативной) целевой функции и весьма чувствительны к количеству ограничений задачи.

Рассмотрим в качестве примера решение задачи целочисленного программирования с одним линейным ограничением.

Задача 2. Найти переменные $x_k \geqslant 0$ $(k=1, \ldots, n)$, удовлетворяющие ограничению $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \leqslant b$, условию целочисленности (x_k — целые) и обращающие в максимум функцию $Z = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_k)$.

Будем считать a_k и b целыми (это всегда можно сделать, выбрав соответствующим образом единицы измерения этих величин). Параметры состояния равны $\xi_k = b - \sum\limits_{j=1}^{k} a_j x_j$, а $\xi_0 = b$. Уравнения состояний имеют вид $\xi_k = \xi_{k-1} - a_k x_k$.

Пусть, как обычно, $Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max \sum\limits_{j=k}^{n} f_j(x_j)$. Функциональные уравнения для $Z_k^*(\xi_{k-1})$ запишутся в виде

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 < a_k x_k < \xi_{k-1}} \{f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\} \; (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{0 < a_n x_n < \xi_{n-1}} f_n(x_n).$$

Задача 3 (о загрузке). Для загрузки судна ограниченной грузоподъемности $b=7$ т имеются три вида груза. Вес единицы k-го груза и стоимость перевозки x_k единиц k-го груза равны соответственно a_k и $f_k(x_k)$ ($k=1, 2, 3$). Определить количество груза k-го вида, которое следует погрузить на судно, чтобы минимизировать стоимость перевозки груза. В том случае, если груз k-го вида не доставлен, выплачивается штраф в размере $f_k(0)$. Величины a_k составляют $a_1=1$ т, $a_2=2$ т, $a_3=3$ т, а функции $f_k(x_k)$ заданы в табл. 4:

Таблица 4

x_k	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$
0	400	550	700
1	300	400	500
2	250	290	350
3	210	200	
4	170		
5	140		
6	110		
7	20		

Математическая модель задачи — минимизировать функцию

$$Z=f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3).$$

при условиях $x_1+2x_2+3x_2\leqslant 7,\ 0\leqslant x_1\leqslant 7,\ 0\leqslant x_2\leqslant 3,\ 0\leqslant x_3\leqslant 2$.

Состояние ξ_{k-1} в начале k-го шага — вес груза, который можно догрузить до нормы ($k=1, 2, 3$). Управление x_k — число единиц груза k-го вида. Условная оптимизация 3—1-го шагов проведена во вспомогательной таблице (табл. 5) согласно уравнениям:

$$Z_3^*(\xi_2)=\min_{0<x_3<[\xi_2/3]} f_3(x_3),$$

$$Z_2^*(\xi_1)=\min_{0<x_2<[\xi_1/2]} \{f_2(x_2)+Z_3^*(\xi_1-2x_2)\},$$

$$Z_1^*(7)=\min_{0<x_1<7} \{f_1(x_1)+Z_2^*(7-x_1)\}$$

Таблица 5

ξ_{k-1}	$k=3$; $Z_3^*(\xi_2)$		$k=2$; $Z_2^*(\xi_1)$			$k=1$; $Z_1^*(7)$		
	x_3	$f_3(x_3)$	x_2	$\xi_2=\xi_1-2x_2$	$f_2(x_2)+Z_3^*(\xi_2)$	x_1	$\xi_1=\xi_0-x_1$	$f_1(k_1)+Z_2^*(\xi_1)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	700	0	7	540+350=890	0	7	400+790 =1190
7	1	500	1	5	400+500=900	1	6	300+890 =1190
	2	350	2	3	290+500=790	2	5	250+900 =1150
			3	1	200+700=900	3	4	210+990 =1200
						4	3	170+1040=1210
						5	2	140+1100=1240
						6	1	110+1240=1350
						7	0	20+1240=1260
	0	700	0	6	540+350=890			
6	1	500	1	4	400+500=900			
			2	2	290+700=990			
	2	350	3	0	200+700=900			
	0	700	0	5	540+500=1040			
5	1	500	1	3	400+500=900			
			2	3	290+700=990			
	1	700	0	4	540+500=1040			
4	1	500	1	2	400+700=1100			
			2	0	290+700=990			
	0	700	0	3	540+500=1040			
3	1	500	1	1	400+700=1100			
		700	0	2	540+700=1240			
2	0		1	0	400+700=1100			
1	0	700	0	1	540+700=1240			
0	0	700	0	0	540+700=1240			

(через $[\xi_{k-1}/a_k]$ обозначена целая часть отношения ξ_{k-1}/a_k).

Итоги условной оптимизации помещены в основную таблицу (табл. 6).

Оптимальное решение: $Z^*_{\min}=1150$; $x_1^*=2$; $\xi_1^*=5$; $x_2^*=1$; $\xi_2^*=3$; $x_3^*=1$; $\overline{X}^*=(2,1,1)$.

Таблица 6

ξ_{k-1}	$x_3^*(\xi_2)$	$Z_3^*(\xi_2)$	$x_2^*(\xi_1)$	$Z_2^*(\xi_1)$	$x_1^*(7)$	$Z_1^*(7)$
7	2	350	2	790	$\underline{2}$	1150
6	2	350	0	890		
5	1	500	$\underline{1}$	900		
4	1	500	2	990		
3	$\underline{1}$	500	0	1040		
2	0	700	1	1100		
1	0	700	0	1240		
0	0	700	0	1240		

Минимальные суммарные затраты на перевозку достигаются, если перевозить 2 ед. груза 1-го вида, 1 ед. груза 2-го вида и 1 ед. груза 3-го вида.

§ 3. Использование множителей Лагранжа

Вычислительная схема ДП усложняется с ростом числа ограничений. Каждое из новых ограничений вводит в модель новый параметр состояния. В некоторых случаях трудности можно преодолеть, используя множители Лагранжа. Рассмотрим задачу, аналогичную задаче 2, но с двумя линейными ограничениями, одно из которых выполняется как строгое равенство.

Задача 4. Средства предприятия в количестве 5 ед. делятся между тремя цехами. Прибыль от производства k-го цеха при выделении ему x ед. оценивается функциями $f_k(x)$ $(k=1, 2, 3)$, заданными в табл. 7:

Таблица 7

x	1	2	3	4
$f_1(x)$	1,10	2,35	3,16	3,81
$f_2(x)$	2,32	2,84	3,21	3,56
$f_3(x)$	0,54	1,58	2,76	3,95

На вкладываемые средства x_k налагаются ограничения: $x_1+2x_2+3x_3=6$.

Определить, при каком способе распределения средств суммарная прибыль, полученная от всех цехов, максимальна.

Математическая модель задачи — найти максимум функции

$$Z=f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3) \tag{5.9}$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{3} x_k \leqslant 5,\ 0\leqslant x_k \leqslant 4\,(k=1,\ 2,\ 3), \tag{5.10}$$

$$x_1+2x_2+3x_3=6. \tag{5.11}$$

Решим задачу, используя множитель Лагранжа.

Рассмотрим новую целевую функцию

$$T=\sum_{k=1}^{3} f_k(x_k)-\lambda(x_1+2x_2+3x_3). \tag{5.12}$$

Введем обозначения:

$$t_1(x_1,\ \lambda)=f_1(x_1)-\lambda x_2;\ t_2(x_2,\ \lambda)=f_2(x_2)-2\lambda x_2;$$
$$t_3(x_3,\ \lambda)=f_3(x_3)-3\lambda x_3.$$

Тогда функция (5.12) примет вид

$$T=\sum_{k=1}^{3} t_k(x_k,\ \lambda). \tag{5.13}$$

Поставим задачу отыскания целых неотрицательных значений x_k, удовлетворяющих ограничениям (5.10) и максимизирующих функцию (5.13). Здесь λ — некоторое фиксированное число, а x_k зависят от λ. Если для данного λ соотношение (5.11) выполняется как строгое равенство, то $x_k^*(\lambda)$ являются оптимальным решением исходной задачи. В этом случае функции Z и T отличаются на постоянную 6λ. Если равенство (5.11) не выполняется, то фиксируем новое значение λ и повторяем процесс решения задачи (5.10), (5.13). (Лучше начинать с небольшого λ, близкого к нулю или даже равного нулю.) Зная λ_1 и λ_2 и соответствующие значения разности левой и правой частей (5.11), с помощью линейной интерполяции можно определить λ_3, при котором указанная разность равна нулю. По значениям λ_1, λ_2, λ_3 можно, используя квадратичную интерполяцию, найти λ_4 и т. д.

Пусть $T_k^*(\xi_{k-1}, \lambda)$ — условная максимальная прибыль, полученная с k-го шага ($k=1, 2, 3$) до конца процесса, при фиксированном λ. Возьмем в качестве λ сначала $\lambda_1=0$, проведем условную оптимизацию в табл. 9 (4—9-й столбцы), а результат внесем в основную табл. 8 (2—4-й столбцы).

Таблица 8 (основная)

ξ	$\lambda=0$			$\lambda=0,01$			$\lambda=0,02$			$T_1^*(\xi_0,\lambda_3)$
	$x_3^*(\xi_2)$	$x_2^*(\xi_1)$	$x_1^*(\xi_0)$	$x_3^*(\xi_2)$	$x_2^*(\xi_1)$	$x_1^*(\xi_0)$	$x_3^*(\xi_2)$	$x_2^*(\xi_1)$	$x_1^*(\xi_0)$	
5	4	1	0	4	1	2	4	2	4	6,01
4	4	1		4	1		4	1		
3	3	1		3	1		3	1		
2	2	1		2	1		2	2(1)		
1	1	1		1	1		1	1		

Оптимальным является решение: $x_1^*(0)=0$; $x_2^*(0)=1$; $x_3^*(0)=4$. Проверяем равенство (5.11). Левая часть его при полученных значениях $x_k^*(0)$ равна 14. Пусть

$$x_1^*(\lambda)+2x_2^*(\lambda)+3x_3^*(\lambda)-6=\varphi(\lambda); \tag{5.14}$$

тогда $\varphi(0)=8$. Поскольку равенство (5.11) не выполняется, фиксируем новое λ: $\lambda_2=0,01$. Решение новой задачи приведено в табл. 9 (10—15-й столбцы), а результат занесен в табл. 8 (5—7-й столбцы). Для $\lambda_2=0,01$ оптимальным является решение $x_1^*(0,01)=2$; $x_2^*(0,01)=1$; $x_3^*(0,01)=2$. В этом случае $\varphi(0,01)=4$, т. е. полученное решение также не является решением исходной задачи.

Проведем линейную интерполяцию по двум точкам $\lambda_1=0$; $\varphi(\lambda_1)=8$ и $\lambda_2=0,01$; $\varphi(\lambda_2)=4$ (рис. 11). Найдем значение λ_3, для которого $\varphi(\lambda_3)=0$:

$$(\lambda_3-0,01)/0,01=4/4;\ \lambda_3=0,02.$$

Оптимизация функции T при $\lambda_3=0,02$ приведена в 16—21-м столбцах табл. 9, ее итоги помещены в 8—11-м столбцах табл. 8. В результате получим $x_1^*(0,02)=4$; $x_2^*(0,02)=1$; $x_3^*(0,02)=0$. Условие (5.11) выполняется, поэтому данное решение и для исходной задачи является оптимальным:

$$Z_{\max}=T_1^*(\xi_0,\ \lambda_3)+6\lambda_3=6{,}01+0{,}02\cdot 6=6{,}13.$$

Итак, максимальная прибыль, равная 6,13, получится, если 1-му цеху выделить 4 ед., 2-му цеху — 1 ед. и 3-му цеху — 0 ед. средств.

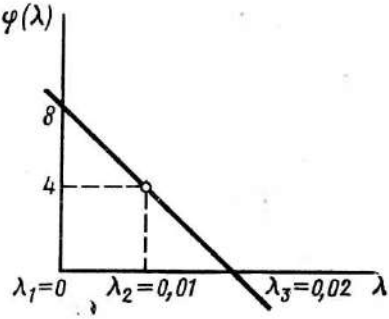

Рис. 11

Способ множителей Лагранжа делает процедуру вычисления более трудоемкой и даже не всегда выполнимой. Достаточные условия применимости данного метода дать трудно.

§ 4. Задачи о маршрутизации

Методом ДП с успехом могут решаться задачи, приводящиеся к сетевым моделям, такие, как транспортные задачи с произвольной (не обязательно линейной) функцией затрат; задачи замены оборудования (например, задача 4 гл. IV); задачи управления запасами и другие задачи, в которых требуется найти кратчайший путь на ориентированной сети.

З а д а ч а 5. Дана ориентированная сеть, содержащая N точек (узлов). Найти кратчайший путь из точки 1 в точку N, если задана матрица (a_{ij}) расстояний из i в j. Если какие-либо точки i и j не соединены дугами, то следует считать, что соответствующие $a_{ij}=\infty$, а $a_{ii}=0$.

Построим динамическую модель выбора кратчайшего пути.

Таблица 9

ξ_{k-1}	x_k	ξ_k	λ = 0						λ = 0,01						λ = 0,02					
			$k=2$	$T_2^*(\xi_1)$		$k=1$	$T_1^*(5)$		$k=2$	$T_2^*(\xi_1)$		$k=1$	$T_1^*(5)$		$k=2$	$T_2^*(\xi_1)$		$k=1$	$T_1^*(5)$	
			t_2	T_3^*	$\sum$	t_1	T_2^*	$\sum$	t_2	T_3^*	$\sum$	t_1	T_2^*	$\sum$	t_2	T_3^*	$\sum$	t_1	T_2^*	$\sum$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	1	0	0,54	0,54				0	0,51	0,51				0	0,48	0,48			
	1	0	2,32	0	2,32				2,30	0	2,30				2,28	0	2,28			
2	0	2	0	1,58	1,58				0	1,52	1,52				0	1,46	1,46			
	1	1	2,32	0,54	2,86				2,30	0,51	2,81				2,28	0,48	2,76			
	2	0	2,84	0	2,84				2,80	0	2,80				2,76	0	2,76			
3	0	3	0	2,76	2,76				0	2,67	2,67				0	2,58	2,88			
	1	2	2,32	1,58	3,90				2,30	1,52	3,82				2,28	1,46	3,74			
	2	1	2,84	0,54	3,34				2,80	0,51	3,31				2,76	0,48	3,24			
	3	0	3,21	0	3,21				3,15	0	3,15				3,09	0	3,09			
4	0	4	0	3,95	3,95				0	3,83	3,83				0	3,71	3,71			
	1	3	2,32	2,76	5,08				2,30	2,67	4,97				2,28	2,58	4,86			
	2	2	2,84	1,58	4,32				2,80	1,52	4,32				2,76	1,46	4,22			
	3	1	3,21	0,54	3,75				3,15	0,51	3,66				3,09	0,48	3,57			
	4	0	3,56	0	3,56				3,48	0	3,48				3,40	0	3,40			
5	0	5	0	—	—	0	6,27	6,27	0			0	6,13	6,13	0	—	—	0	5,99	5,99
	1	4	2,32	3,95	6,27	1,10	5,08	6,18	2,30	3,83	6,13	1,09	4,97	6,06	2,28	3,71	5,99	1,08	4,86	5,92
	2	3	2,84	2,76	5,60	2,35	3,90	6,25	2,80	2,67	5,47	2,33	3,82	6,15	2,76	2,58	5,34	2,21	3,74	5,95
	3	2	3,21	1 58	4,79	3,16	2,86	6,02	3,15	1,52	4,67	3,13	2,81	5,94	3,09	1,46	4,55	3,10	2,76	5,86
	4	1	3,56	0,54	4,10	3,81	2,32	6,13	3,48	0,51	3,99	3,77	2,30	6,03	3,40	0,48	3,88	3,73	2,28	6,01

Обозначим через Z_i^* минимальный путь из точки i в N. Оптимальный маршрут из любой точки i обладает тем свойством, что каков бы ни был способ достижения пункта i, последующее решение должно быть оптимальным для части пути, начинающегося в точке i (принцип оптимальности). Пусть из i можно перейти в j, расстояние между этими точками равно a_{ij}. Точка j должна выбираться таким образом, чтобы путь из j в N был частью оптимального пути из i в N. Обозначим минимальный путь из j в N через Z_j^*. Тогда j выбирается из условия минимизации суммы $a_{ij}+Z_j^*$. Таким образом, получаем уравнения Беллмана

$$Z_i^*=\min_{j\neq i}\{a_{ij}+Z_j^*\}. \qquad (5.15)$$

Для реализации уравнения (5.15) разделим условно все точки сети на n множеств по числу шагов $1, 2, \ldots, n$ (рис. 12). К множеству ξ_0 отнесем точки, из которых

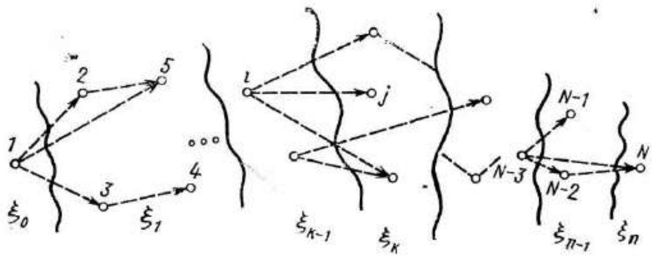

Рис. 12

можно попасть в N не более чем за n шагов, к ξ_1 — точки, из которых можно попасть в N не более чем за $n-1$ шагов, и т. д. Если $i\in\xi_{k-1}$, то будем считать, что $j\in\xi_k$. Тогда уравнения (5.15) примут вид

$$Z_k^*(i)=\min_{\substack{i\in\xi_{k-1}\\ j\in\xi_k}}\{a_{ij}+Z_{k+1}^*(j)\}. \qquad (5.16)$$

Условным оптимальным решением на k-м шаге является точка j, в которую следует перейти из i; обозначим ее $u_k^*(i)$.

Точку 1 (единственную) отнесем к множеству ξ_0; тогда $Z_{\min}=Z_1^*(1)$. Уравнения (5.16) будем решать графически, начиная с конца. Точку N (единственную) отнесем к множеству ξ_n; тогда $Z^*_{n+1}(N)=0$. Множество ξ_{n-1} состоит из точек i, из которых можно попасть в N не более чем за один шаг, поэтому

$$Z^*_n(i)=\min_{\substack{i\in\xi_{n-1}\\ j=N}}\{a_{ij}\}=a_{iN},\ u^*_n(i)=N.$$

Аналогично для точек $i\in\xi_{n-2}$ имеем

$$Z^*_{n-1}(i)=\min_{\substack{i\in\xi_{n-2}\\ j\in\xi_{n-1}}}\{a_{ij}+Z^*_n(j)\}=\min_{\substack{i\in\xi_{n-2}\\ j\in\xi_{n-1}}}\{a_{ij}+a_{jN}\};\ u^*_{n-1}(i)$$

и т. д. В итоге условной оптимизации получим совокупность условных оптимальных решений $u_k{}^*(i)$, используя которые, последовательно определим точки, соответствующие оптимальному маршруту.

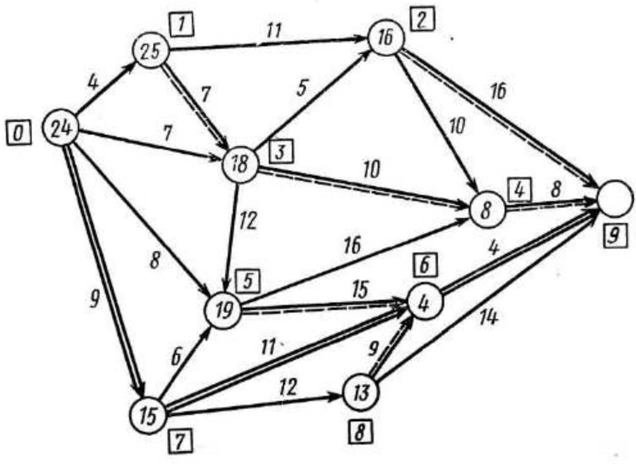

Рис. 13

Решим задачу для сети, изображенной на рис. 2 (см. гл. I). Воспроизведем этот рисунок, переобозначив пункты A_i на i (рис. 13). Расстояния a_{ij} проставлены на рис. 13.

Задача 6. Найти кратчайший путь из пункта 0 в пункт 9 на сети, изображенной на рис. 13.

Отнесем к множеству ξ_4 точки 4 и 6, из которых можно попасть в точку 9 не более чем за один шаг; к ξ_3 —

точки 2, 5 и 8 (не более чем два шага до 9); к ξ_2 — точки 3 и 7 (не более чем три шага до 9); к ξ_1 — точку 1 (не более чем четыре шага до 9); к ξ_0 — точку 0.

Условные оптимальные маршруты, начинающиеся в i, будем изображать дополнительной пунктирной стрелкой, начинающейся в i и идущей в j, а условные минимальные пути от i до N записывать в кружке точки i.

Сначала найдем $Z_5^*(4)=8$, $Z_5^*(6)=4$, $u_5^*(\xi_4)=9$. Далее, определим

$$Z_4^*(2)=\min\begin{cases}16 & \text{при } u_4(2)=9,\\ 10+8 & \text{при } u_4(2)=4,\end{cases}$$

$$\text{т. е. } Z_4^*(2)=16,\ u_4^*(2)=9;$$

$$Z_4^*(5)=\min\begin{cases}16+8 & \text{при } u_4(5)=4,\\ 15+4 & \text{при } u_4(5)=6,\end{cases}$$

$$\text{т. е } Z_4^*(5)=19,\ u_4^*(5)=6;$$

$$Z_4^*(8)=\min\begin{cases}9+4 & \text{при } u_4(8)=6,\\ 14 & \text{при } u_4(8)=9,\end{cases}$$

$$\text{т. е. } Z_4^*(8)=13,\ u_4^*(8)=6;$$

и т. д. Получаем, что минимальный путь равен $Z_1^*(0)=$ $=24$. Соответствующий маршрут проходит через точки 0, 7, 6, 9 (на рис. 2 оптимальный маршрут проходит через точки A, A_7, A_6, B).

§ 5. Примеры стохастических моделей ДП

В гл. I мы отмечали, что метод ДП можно применять для оптимизации стохастических процессов.

Рассмотрим n-шаговую задачу распределения ресурсов. Пусть ξ_{k-1} — состояние системы в начале k-го шага ($k=1, 2, \dots, n$). Для стохастической модели под воздействием управления u_k фиксированное состояние ξ_{k-1} переходит в случайное состояние ξ_k, при этом должно быть задано распределение вероятностей случайной величины ξ_k. Управление u_k на k-м шаге следует считать случайным, и целевая функция стохастической задачи является случайной величиной. Поэтому принято оптимизировать математическое ожидание целевой функции.

Таким образом, задача оптимизации в стохастическом случае сводится к тому, чтобы определить набор значений управляющих переменных исходя из условия оптимизации математического ожидания целевой функции. Особенностью таких задач является то, что на практике нельзя принимать решение о выборе управления, если не известно состояние системы к началу шага, т. е. прежде чем выносить очередное решение, нужно воспользоваться знанием реализации случайных величин, которые наблюдались прежде.

Задача 7. Средства ξ_0 распределяются между двумя предприятиями в течение n лет. Средства x, вложенные в начале года в предприятие I, приносят в конце года случайный доход $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)$. Аналогично, для средств y, вложенных в предприятие II, соответствующие функции равны $f_2(y)$ и $\varphi_2(y)$. Для функций $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $f_2(y)$ и $\varphi_2(y)$ заданы законы распределения (табл. 10 и 11). Максимизировать суммарный доход от двух предприятий за n лет, если в начале каждого года возвращенные средства перераспределяются, а доход в распределении не участвует.

Таблица 10

$f_1(x)$	$f_1^{(1)}(x)$	$f_1^{(2)}(x)$	...	$f_1^{(m)}(x)$
$\varphi_1(x)$	$\varphi_1^{(1)}(x)$	$\varphi_1^{(2)}(x)$	...	$\varphi_1^{(m)}(x)$
P	p_1	p_2	...	p_m

Таблица 11

$f_2(y)$	$f_2^{(1)}(y)$	$f_2^{(2)}(y)$	...	$f_2^{(s)}(y)$
$\varphi_2(y)$	$\varphi_2^{(1)}(y)$	$\varphi_2^{(2)}(y)$	...	$\varphi_2^{(s)}(y)$
P	q_1	q_2	...	q_s

Построим динамическую модель задачи. Обозначим через ξ_{k-1} средства, подлежащие распределению в k-м году. Предприятию I выделим средства в количестве x_k, а предприятию II — в количестве $y_k = \xi_{k-1} - x_k$. При этом на k-м шаге получим доход $f_1(x_k) + f_2(y_k)$, который является случайной величиной, распределенной по закону, заданному табл. 12 [$f_1(x)$ и $f_2(y)$ считаем независимыми]:

Таблица 12

$f_1(x)+f_2(y)$	$f_1^{(1)}(x_k)+$ $+f_2^{(1)}(y_k)$	$f_1^{(1)}(x_k)+$ $+f_2^{(2)}(y_k)$	$\ldots$	$f_1^{(m)}(x_k)+$ $+f_2^{(s)}(y_k)$
P	p_1q_1	p_1q_2	$\ldots$	p_mq_s

Возвращенные средства ξ_k — случайная величина, закон распределения которой дан в табл. 13*:

Таблица 13

ξ_k	$\varphi_1^{(1)}(x_k)+$ $+\varphi_2^{(1)}(y_k)$	$\varphi_1^{(1)}(x_k)+$ $+\varphi_2^{(2)}(y_k)$	$\ldots$	$\varphi_1^{(m)}(x_k)+$ $+\varphi_2^{(s)}(y_k)$
P	p_1q_1	p_1q_2	$\ldots$	p_mq_s

Обозначим через $Z_k^*(\xi_{k-1})$ максимум математического ожидания дохода, полученного от двух предприятий, начиная с k-го шага по n-й включительно, если в начале k-го шага были распределены средства ξ_{k-1}:

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{(x_k,\ldots,x_n)} M\sum_{l=k}^{n}[f_1(x_l)+f_2(\xi_{l-1}-x_l)]. \quad (5.17)$$

Применяя свойство линейности математического ожидания, получим

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{(x_k,\ldots,x_n)}\Big\{M[f_1(x_k)+f_2(\xi_{k-1}-x_k)]+ + M\sum_{l=k+1}^{n}[f_1(x_l)+f_2(\xi_{l-1}-x_l)]\Big\},$$

или, используя распределение для дохода на k-м шаге,

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{x_k}\Big\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{s}p_jq_l\,[f_1^{(j)}(x_k)+f_2^{(l)}(\xi_{k-1}-x_k)+ + Z_{k+1}^*(\varphi_1^{(j)}+\varphi_2^{(l)})]\Big\}. \quad (5.18)$$

Решаем уравнение (5.18), начиная с $k=n$; при $k=1$ получаем $Z_1^*(\xi_0)=\bar{Z}_{\max}$ — средний максимальный доход за n лет. Соответствующее оптимальное управление $U^*=(\bar{X}^*, \bar{Y}^*)$ есть случайный вектор.

* Табл. 12 и 13 задают распределения случайных величин, если значения в их первых строках различны. В противном случае нужна предварительная группировка.

Задача 8. Решить задачу 7 при условии, что $\xi_0=1000$; $n=4$; $f_1^{(1)}(x)=0{,}4x$; $\varphi_1^{(1)}(x)=0{,}5x$; $p_1=2/3$; $f_1^{(2)}(x)=0{,}3x$; $\varphi_1^{(2)}(x)=0{,}7x$; $p_2=1/3$; $f_2^{(1)}(y)=0{,}3y$; $\varphi_2^{(1)}(y)=0{,}8y$; $q_1=1/2$; $f_2^{(2)}(y)=0{,}2y$; $\varphi_2^{(2)}(y)=0{,}9y$; $q_2=1/2$.

Здесь закон распределения случайной величины ξ_k задается следующим образом:

Таблица 14

ξ_k	$0{,}8\xi_{k-1}-0{,}3x_k$	$0{,}9\xi_{k-1}-0{,}4x_k$	$0{,}8\xi_{k-1}-0{,}1x_k$	$0{,}9\xi_{k-1}-0{,}2x_k$
P	1/3	1/3	1/6	1/6

Доход на k-м шаге распределен по следующему закону:

Таблица 15

Доход на k-м шаге	$0{,}3\xi_{k-1}+0{,}1x_k$	$0{,}2\xi_{k-1}+0{,}2x_k$	$0{,}3\xi_{k-1}$	$0{,}2\xi_{k-1}+0{,}1x_k$
P	1/3	1/3	1/6	1/6

Условную оптимизацию по уравнениям (5.18) начинаем с $k=4$:

$$Z_4^*(\xi_3)=\max_{0<x_4<\xi_3}\left\{\frac{1}{3}(0{,}3\xi_3+0{,}1x_4)+\frac{1}{3}(0{,}2\xi_3+0{,}2x_4)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}0{,}3\xi_3+\frac{1}{6}(0{,}2\xi_3+0{,}1x_4)=\right.$$
$$=\max_{0<x_4<\xi_3}\left\{\frac{1}{6}(1{,}5\xi_3+0{,}7x_4)\right\}=\frac{11}{30}\xi_3 \text{ при } x_4^*(\xi_3)=\xi_3;$$

$$Z_3^*(\xi_2)=\max_{0<x_3<\xi_2}\left\{\frac{1}{3}\left[0{,}3\xi_2+0{,}1x_3+\frac{11}{30}(0{,}8\xi_2-0{,}3x_3)\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{3}\left[0{,}2\xi_2+0{,}2x_3+\frac{11}{30}(0{,}9\xi_2-0{,}4x_3)\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[0{,}3\xi_2+\frac{11}{30}(0{,}8\xi_2-0{,}1x_3)\right]+\frac{1}{6}\left[0{,}2\xi_2+0{,}1x_3+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{11}{30}(0{,}9\xi_2-0{,}2x_3)\right]\right\}=\max_{0<x_3<\xi_2}\left\{\frac{1011}{1800}\xi_2-\frac{109}{108}x_3\right\}\cong$$
$$\cong 0{,}56\xi_2 \text{ при } x_3^*(\xi_2)=0.$$

Аналогично получаем

$$Z_2^*(\xi_1)=0{,}74\ \xi_1 \text{ при } x_2^*(\xi_1)=0;$$

$$Z_1^*(\xi_0)=0{,}88\ \xi_0 \text{ при } x_2^*(\xi_0)=0.$$

При $\xi_0=1000$ имеем $\bar{Z}_{\max}=880$, оптимальное управление: $x_1^*=0$; $y_1^*=1000$. По табл. 14 находим значения для ξ_1^* и y_2^*; так как $y_2^*=\xi_1^*$, то закон распределения ξ_1^* и y_2^*, имеет вид:

Таблица 16

$\xi_1^*=y_2^*$	800	900
P	1/2	1/2

Рассуждая аналогично, для оптимального управления U^* получим следующую таблицу распределения вероятностей:

Таблица 17

$\bar{X}^*$	(0, 0, 512)	(0, 0, 0,576)	(0, 0, 0,576)	(0, 0, 0,648)
$\bar{Y}^*$	(1000, 800, 640, 0)	(1000, 800, 640, 0)	(1000, 900, 720, 0)	(1000, 900, 720, 0)
P	1/8	1/8	1/8	1/8
$\bar{X}^*$	(0, 0, 0, 576)	(0, 0, 0, 648)	(0, 0, 0,648)	(0, 0, 0, 819)
$\bar{Y}^*$	(1000, 900, 720, 0)	(1000, 800, 720 ,0)	(1000, 900, 810, 0)	(1000, 900, 810, 0)
P	1/8	1/8	1/8	1/8

В заключение рассмотрим элементарную вероятностную задачу управления запасами, аналогичную задаче 1 гл. III.

Задача 9. Планируемый период разделен на $n=3$ промежутка времени; расход в каждом промежутке принимает одно из двух независимых и равновероятных значения: $P(d_k=2)=1/2$; $P(d_k=4)=1/2$. Начальный уровень запасов $\xi_0=2$. Затраты на хранение и пополнение в данном промежутке зависят от уровня запасов в конце промежутка ξ_k и пополнения x_k $(k=1, 2, 3)$. Предполагается, что уровень запасов и размеры пополнения в каждом промежутке ограничены: $\xi_k \leqslant 4$; $x_k \leqslant 5$, функция затрат есть

$$f_k(\xi_k,\ x_k)=\varphi(\xi_k)+\psi(x_k), \tag{5.19}$$

где $\varphi(\xi_k)=\alpha\,\xi_k$ $(\alpha=1)$, а $\psi(x_k)$ задана таблично:

x_k	0	1	2	3	4	5
$\psi(x_k)$	0	15	17	19	21	23

Требуется найти совокупность величин x_k, минимизирующих суммарные затраты на хранение и пополнение в течение планируемого периода.

Предположим, что своевременное пополнение приводит к тому, что запасы никогда не истощаются даже при максимальном расходе $x_k=4$, т. е. для любого периода имеет место неравенство $\xi_{k-1}+x_k \geqslant 4$, или $x_k \geqslant 4-\xi_{k-1}$. Вместе с тем, так как минимальный расход равен 2 ед., а уровень запасов в конце промежутка не превосходит 4 ед., то $\xi_{k-1}+x_k \leqslant 6$, или $x_k \leqslant 6-\xi_{k-1}$. Таким образом, в любом промежутке размеры пополнения удовлетворяют неравенствам

$$4-\xi_{k-1} \leqslant x_k \leqslant \min\{5;\ 6-\xi_{k-1}\}. \tag{5.20}$$

Состояние системы характеризуется величиной запасов ξ_{k-1} в начале промежутка k. Величина ξ_k, равная

$$\xi_k=\xi_{k-1}+x_k-d_k, \tag{5.21}$$

является случайной величиной:

$$P(\xi_k=\xi_{k-1}+x_k-2)=1/2;\ P(\xi_k=\xi_{k-1}+x_k-4)=1/2. \tag{5.22}$$

Обозначим через $Z_k^*(\xi_{k-1})$ математическое ожидание условных минимальных затрат с k-го по n-й промежуток включительно при условии, что к началу промежутка уровень запасов равен ξ_{k-1}. Для $k=2;\ 1$ величины $Z_k^*(\xi_{k-1})$ удовлетворяют уравнениям

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\min_{x_k}\{M[f_k(\xi_k,\ x_k)+Z_{k+1}^*(\xi_k)]\}$$

откуда, учитывая (5.19)—(5.21), получим

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\min_{x_k}\Big\{\psi(x_k)+\frac{1}{2}(\xi_{k-1}+x_k-2)+\frac{1}{2}\times$$

$$\times(\xi_{k-1}+x_k-4)+\frac{1}{2}Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}+x_k-2)+$$

$$+\frac{1}{2}Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}+x_k-4)\Big\},$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\min_{x_k}\{\psi(x_k)+(\xi_{k-1}+x_k-3)+$$

$$+\frac{1}{2}Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}+x_k-2)+\frac{1}{2}Z_{k+1}^*(\xi_{k-1}+x_k-4)\Big\}. \qquad (5.23)$$

Для $k=3$ имеем

$$Z_3^*(\xi_2)=\min_{x_3}\Big\{\psi(x_3)+\frac{1}{2}(\xi_2+x_3-2)+\frac{1}{2}(\xi_2+x_3-4),$$

или

$$Z_3^*(\xi_2)=\min_{x_3}\{\psi(x_3)+(\xi_2+x_3-3)\}. \qquad (5.24)$$

Решая уравнения (5.24) с учетом ограничений (5.20) на x_3, получим, что минимум достигается при $x_3=3-\xi_2$, т. е.

$$Z_3^*(\xi_2)=\psi(3-\xi_2);\ x_3^*(\xi_2)=3-\xi_2. \qquad (5.25)$$

Уравнение (5.23) для $k=2$ примет вид

$$Z_2^*(\xi_1)=\min\{\psi(x_2)+(\xi_1+x_2-3)+\frac{1}{2}\psi(8-\xi_1-x_2)+$$

$$+\frac{1}{2}\psi(6-\xi_1-x_2)\Big\}. \qquad (5.26)$$

Оно решено в табл. 19.

При $\xi_0=2$ уравнение (5.23) для $k=1$ принимает вид

$$Z_1^*(2)=\min_{2<x_1<4}\Big\{\psi(x_1)+(x_1-1)+\frac{1}{2}Z_2^*(x_1)+$$

$$+\frac{1}{2}Z_2^*(x_1-2)\Big\}. \qquad (5.27)$$

Решаем это уравнение для $x_1=2;\ 3;\ 4$:

$$Z_1(2{,}2)=17+1+(1/2)\cdot 32{,}5+(1/2)\cdot 41=54{,}75;$$
$$Z_1(2{,}3)=19+2+(1/2)\cdot 30{,}5+(1/2)\cdot 34{,}5=53{,}5;$$
$$Z_1(2{,}4)=21+3+(1/2)\cdot 19+(1/2)\cdot 32{,}5=49{,}75.$$

Таблица 19

ξ_1	x_2	$\psi(x_2)$	$\xi_1 + x_2 - 3$	$\frac{1}{2}\psi(6-\xi_1-x_2)$	$\frac{1}{2}\psi(8-\xi_1-x_2)$	$Z_2(\xi_1, x_2)$	$Z_2^*(\xi_1)$	x_1^*
0	4	21	1	8,5	10,5	41	41	4
	5	23	2	7,5	9,5	42		
1	3	19	1	8,5	10,5	39	34,5	5
	4	21	2	7,5	9,5	40		
	5	23	3	0	8,5	34,5		
2	2	17	1	8,5	10,5	37	32,5	4
	3	19	2	7,5	9,5	38		
	4	21	3	0	8,5	32,5		
3	1	15	1	8,5	10,5	35	30,5	3
	2	17	2	7,5	9,5	36		
	3	19	3	0	8,5	30,5		
4	0	0	1	8,5	10,5	19	19	0
	1	15	2	7,5	9,5	34		
	2	17	3	0	8,5	28,5		

Итак, получаем $Z_{\min} = Z_1^*(2) = 49{,}75$; $x_1^* = 4$.

Используя равенства (5.22), найдем распределение для ξ_1: $P(\xi_1=4)=1/2$; $P(\xi_1=2)=1/2$. Из табл. 19 следует $P(x_2^*=0)=1/2$ и $P(x_2^*=4)=1/2$. Аналогично получаем распределение для ξ_2: $P((\xi_2=2)/(\xi_1=4))=1/4$; $P((\xi_2=0)/(\xi_1=4))=1/4$; $P((\xi_1=4)/(\xi_1=2))=1/4$; $P((\xi_2=2)/(\xi_1=2))=1/4$ и соответственно $P(x_3^*=1)=1/4$; $P(x_3^*=3)=1/4$; $P(x_3^*=0)=1/4$; $P(x_3^*=1)=1/4$.

Закон распределения для оптимального управления имеет вид

$\overline{X}^*$	(4, 0, 1)	(4, 0, 3)	(4, 4, 0)	(4, 4, 1)
P	1/4	1/4	1/4	1/4

Анализ числовых примеров показывает, что, как правило, затраты при оптимальном управлении в случае стохастического расхода выше оптимальных затрат при детерминированном расходе. Например, при решении задачи, аналогичной 9, в случае, когда детерминированный расход равен $d_h=3$ — среднему расходу в задаче 9, при неизменности остальных данных получим $Z_{\min}=44$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Методом ДП решить следующие задачи с мультипликативной целевой функцией: а) максимизировать функцию $Z=x_1x_2x_3x_4$ при условиях $x_1+x_2+x_3+x_4=a$, $x_k \geqslant 0$ $(k=1, 2, 3, 4)$; б) максимизировать функцию $Z(x_1/c_1)(x_2/c_2)\ldots(x_n/c_n)$ при ограничениях $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k=D$, $x_k \geqslant 0$ $(k=1, \ldots, n)$. Как зависит оптимальное решение от D?

2. Имеется некоторое количество средств ξ_0, которое используется для достижения некоторой цели. Для этого может быть сделано не более n попыток, при каждой из которых расходуется часть средств. Вероятность достижения цели при каждой попытке есть неубывающая функция количества средств, использованных при этой попытке. Если при какой-то попытке цель достигнута, то дальнейшие попытки прекращаются. Требуется распределить средства между попытками так, чтобы максимизировать вероятность достижения цели. Ввести все необходимые функции; наметить схему решения задачи методом ДП.

Указание. Перейти к вероятности недостижения цели.

3. Самолет грузоподъемностью 100 т необходимо загрузить предметами четырех типов, характеризующихся весом α_i и стоимостью p_i $(i=1, 2, 3, 4)$. Известно, что $\alpha_1=5$, $\alpha_2=20$, $\alpha_3=10$, $\alpha_4=15$; $p_1=20$, $p_2=40$, $p_3=40$, $p_4=55$. Определить оптимальный план загрузки, исходя из максимизации суммарной стоимости груза.

4. Используя множители Лагранжа, решить следующие задачи: а) минимизировать функцию $Z=3x_1+4x_2+6x_3+8x_4+6x_5$ при ограничениях $x_1+2x_2+2x_3+3x_4+x_5=3$, $2x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5 \leqslant 4$, x_k — целые неотрицательные; б) максимизировать функцию $Z=\sum\limits_{k=1}^{4} f_k(x_k)$ при ограничениях $x_1+x_2+x_3+x_4 \leqslant 5$, $x_1+2x_2+x_3+2x_4=7$, x_k — целые неотрицательные, если $f_k(x)$ заданы таблично:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
1	0,5	1,2	0,2	0,9
2	1,5	2,0	0,5	1,3
3	2,5	2,1	2,6	1,5
4	3,0	2,2	4,8	1,5
5	3,1	2,3	5,0	1,5

5. Используя множитель Лагранжа, решить задачу 3, если имеются дополнительные ограничения по объему. Общий объем не превосходит 10, а объемы каждого из трех видов предметов не превосходят соответственно $V_1=2$, $V_2=2$, $V_3=6$.

6. На рис. 14 и 15 проставлены цифры, характеризующие стоимость a_{ij} проезда из пункта i в пункт j. Требуется: а) для рис. 14 найти оптимальный маршрут из пункта 1 в пункт 13, соответствующий минимальной стоимости проезда; б) для рис. 15 найти оптимальный маршрут при условии, что он пройдет через пункт 8; в) для рис. 15 найти оптимальный маршрут из A в B.

7. Товар в количестве 100 ед. может реализоваться на трех рынках по ценам p_1, p_2 и p_3 за единицу продукции. Определить оптимальное распределение товара между рынками при следующих зависимостях цены от объема предлагаемой продукции x_i на данном рынке:

$$p_1 = \begin{cases} 40 - 2x_1 & \text{при } 0 \leqslant x_1 \leqslant 20: \\ 0 & \text{при } x_1 > 20; \end{cases}$$

$$p_2 = \begin{cases} 30 & \text{при } 0 \leqslant x_2 \leqslant 30; \\ 50 - 0,5\ x_2 & \text{при } x_3 > 30; \end{cases} \quad p_3 = 30 - 0,3\ x_3.$$

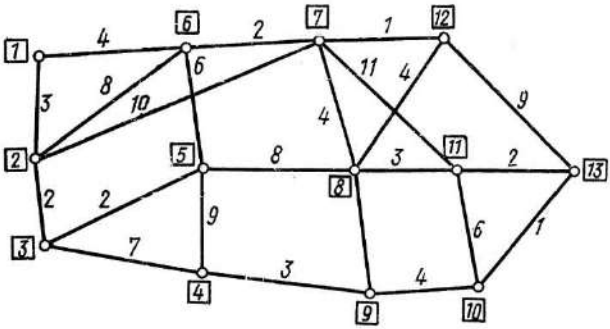

Рис. 14

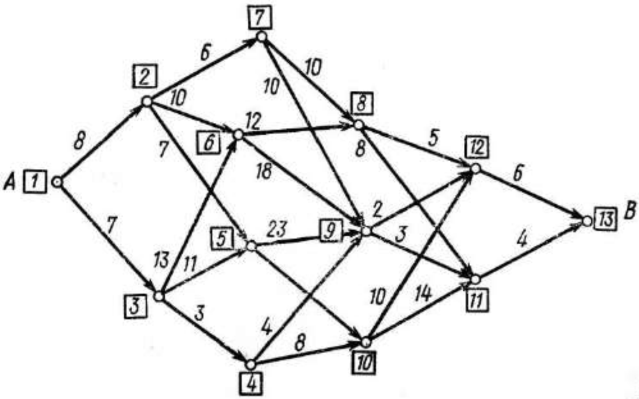

Рис. 15

8. Предприятие планирует выпуск продукции на 4 года для удовлетворения спроса $d_i : d_1=25,\ d_2=10,\ d_3=30,\ d_4=20$. Если x_i — выпуск продукции в i-м году, то изменение производственного ритма при переходе от i-го к $(i+1)$-му году характеризуется разностью $x_{i+1} - x_i$ и вызывает затраты, равные $a_i=10$ на каждую единицу

увеличения и $b_i=7$ на каждую единицу уменьшения выпуска продукции. Затраты на хранение продукции в течение одного периода равны $c=20$, а запасы продукции в начале и в конце планируемого промежутка времени соответственно составляют $u_0=20$ и $u_4=0$. Определить оптимальный график производства, минимизирующий суммарные затраты (решить задачу графически).

9. Необходимо загрузить склад тремя типами запчастей, объемы которых соответственно равны 1, 2 и 3. Объем склада равен 10. Штрафные потери, возникающие при неудовлетворении спроса на запчасти, составляют соответственно 800, 800 и 1800 руб. Спрос на запчасти подчинен пуассоновскому закону со средними 4, 2, 1. Спланировать загрузку склада так, чтобы штрафные издержки были минимальными.

ОТВЕТЫ

Глава II

6. $Z_{\max}=36$, $U^*\in\{(3, 2, 4); (3, 3, 3); (4, 1, 4); (4, 2, 3)\}$. 7. $Z_{\max}=44$, $U^*\in\{(2, 6, 4); (2, 7, 3); (7, 1, 4); (7, 2, 3); (8, 1, 3)\}$. 8. $Z_{\max}=1113$, $U^*=(100, 50, 50, 50)$. 9. $Z_{\max}=620$, $X^*\in\{(50, 0, 0\ 100, 50); (50, 0, 10, 100, 40)\ (50, 0, 20, 90, 40); (50, 0, 10, 90, 50); (60, 0, 0, 100, 40); (60, 0, 0, 90, 50); (60, 0, 10, 90, 40\}$. 10. а) $Z_{\max}=125$, $U^*=(150, 50, 50, 50)$; б) $Z_{\max}=93$, $U^*=(100, 50, 50, 0)$. 11. $Z_{\max}=21750$, $X^*=(75, 75, 150)$. 12. $Z_{\max}=81$, $U^*=(50, 150, 0, 100)$. 13. а) $Z_{\max}=305, 2$, $X^*=(300, 120, 48, 19, 2)$, $Y^*=(0, 0, 0, 0)$; б) $Z_{\max}=83, 4$, $X^*=(0, 0, 5, 4)$, $Y^*=(300, 90, 21, 6)$; в) $Z_{\max}=73, 5$, $X^*=(250, 190, 0)$, $Y^*=(50, 0, 133)$; г) $Z_{\max}=720$, $x_1^*=x_2^*=x_3^*=x_4^*=300$; д) $Z_{\max}=2297$, $X^*=(30, 180, 108, 65)$, $y_k^*=0\,(k=1, \ldots, 4)$; е) $Z_{\max}=110, 5$, $x_1^*=x_2^*=x_3^*=0$, $x_4^*=184, 2$; ж) $Z_{\max}= 228$, $X^*=(300, 210, 147, 103)$, $y_k^*=0\,(k=1, \ldots, 4)$; з) $Z_{\max}=4, 27$, $X^*=(0{,}6, 0{,}4, 0{,}43)$, $Y^*=(0{,}4, 0{,}4, 0{,}22)$. 14. б) $Z_{\max}\ 300$, $x_1^*=x_2^*=x_3^*=100$; в) $Z_{\max}=48, 6$, $X^*=(114{,}3; 114{,}3; 71{,}4)$; г) $Z_{\max}=35$, $X^*\in\{(50, 150, 100); (150, 50, 100)\}$. 15. $Z_{\max}=27$, $X^*=(0, 150, 0)$. 18. $Z_{\max}=33$, $X^*=(1, 1, 2)$. 20. $Z_{\max}=1, 356$, $X^*=(0, 0, 0, 74)$, $Y^*=(1; 0, 8; 0)$.

Глава III

1. $Z_{\max}=120$, $X^*=(4, 10, 15, 15)$. 2. $Z_{\max}=140, 2$, $X^*=(6, 15, 15, 15)$. 3. $Z_{\max}=242, 6$, $X^*=(9, 10, 10, 15)$. 4. $Z_{\max}=272, 6$, $X^*\in\{(4, 10, 15, 15); (14, 0, 15, 15)\}$. 6. $Z_{\max}=90$, $X^*=(10, 0, 10, 0)$, $Y^*=(0, 10, 10, 0)$. 7. $Z_{\max}=111$, $X^*=(7, 0, 12, 4)$, $Y^*=(0, 12, 12, 0)$. 8. $Z_{\max}=100$, $X^*=(0, 15, 0, 15)$, $Y^*=(4, 15, 0, 5)$. 9. $Z_{\max}=34$, $X^*=(0, 6, 0, 9, 3)$, $Y^*=(0, 10, 0, 9, 0)$. 10. $Z_{\max}=52$, $X^*=(0, 8, 3, 8)$, $Y^*=(2, 10, 1, 10)$ или $X^*=(0, 8, 4, 8)$, $Y^*=(2, 10, 2, 10)$ или $X^*=(0, 8, 5, 8)$, $Y^*=(2, 10, 3, 10)$.

Глава IV

1. $Z_{\max}=82$; замены после 3-го и 7-го годов. 2. $Z_{\max}=55$; замены не производить. 3. $Z_{\max}=90$; замены после 2, 5, 7 и 9-го годов. 4. $Z_{\max}=286$; замены после 4-го и 8-го годов. 5. $Z_{\max}=278$; замена после 6-го года. 6. $Z_{\max}=170$; замена после 3-го года. 7. $Z_{\max}=400$; замена после 4-го и 7-го годов. 9. а) $Z_{\min}=14200$; замена после 3-го года; б) $Z_{\min}=23800$; замены после 3, 6 и 8-го годов; в) замены в начале $4+3m$ годов $(m=0, 1, 2, \ldots)$. 12. $Z_{\min}=30{,}6$; ремонт в начале 3-го года. 13. Замены в начале $4+3m$ годов $(m=0, 1, 2, \ldots)$. 14. Замену производить ежегодно.

Глава V

1. а) $Z_{\max}=a^4/256$, $x_1^*=x_2^*=x_3^*=x_4^*=0{,}25a$. 3. $Z_{\max}=400$; имеются 10 альтернативных решений ($x_1^*=0, 2, \ldots, 20$; соответственно

$x_3^*=10, 9, \ldots, 1, 0, x_2^*=x_4^*=0$). **4.** а) $Z_{\max}=12$, $X^*=(0, 1, 0, 0, 1)$; б) $Z_{\max}=4{,}7$, $X^*=(0, 1, 3, 1)$. **5.** $Z_{\min}=1200$, $X^*=(3, 2, 0)$. **6.** а) $Z_{\min}=14$; через пункты 1, 6, 7, 11, 13; б) $Z_{\min}=35$; через пункты 1, 2, 7, 8, 12, 13; в) $Z_{\min}=25$; через пункты 1, 3, 4, 9, 11, 13.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.

2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., «Наука», 1965.

3. Вагнер Г. Основы исследования операций, т. 2, 3. М., «Мир», 1973.

4. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., «Советское радио», 1972.

5. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Исаак Липович Калихман
Марина Алексеевна Войтенко

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Редактор А. М. Суходский. Технический редактор Э. М. Чижевский. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Художник М. П. Блях. Корректор Г. А. Чеčеткина

ИБ № 1646
Изд. № ФМ—639. Сдано в набор 20. 12. 78. Подп. в печать 03.10.79. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 6,72 усл. печ. л. 5.69 уч.-изд. л. Тираж 20 000 экз. Заказ № 1632. Цена 20 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Хохловский пер., 7.

С к р ы ш е в с к и й А. Ф. **Структурный анализ жидкостей и аморфных тел:** Учебное пособие. — 20 л., ил. — В пер.: 1 р. 10 к.

В книге изложены теоретические и экспериментальные основы рентгенографии, электронографии и нейтронографии жидкостей и аморфных тел. Рассмотрены методы описания их структуры и атомной динамики с помощью коррелятивных функций распределения. Освещены общие представления о природе химических связей и межмолекулярных сил. Дано описание строения молекул, структуры сжиженных инертных газов, жидких металлов и сплавов, индивидуальных молекулярных жидкостей, жидких кристаллов, расплавов солей, растворов электролитов и твердых аморфных тел. Рассмотрен метод молекулярного рассеяния рентгеновских лучей и его применение для исследования флуктуационной структуры жидкостей, геометрических и весовых характеристик микромолекул.

Предназначается для студентов вузов. Может быть полезна аспирантам и научным работникам.

Ф а р б е р Ф. Е. **Физика:** Учебное пособие. — 25 л. — В пер.: 90 к.

Данное пособие является первым, написанным специально для подготовительных отделений медицинских институтов. Оно состоит из математического введения и шести глав по физике. Теоретическая часть не заменяет школьных учебников, а представляет собою конспективную форму изложения учебного материала с более подробным анализом наиболее трудных вопросов. Важной особенностью пособия является его медицинская направленность, что сказывается на подборе иллюстративных примеров и на подборе некоторых задач.

Предназначается для подготовительных отделений медицинских институтов.

Уважаемые читатели!

Издательство «Высшая школа» выпускает учебники, учебные и методические пособия, плакаты. Подробнее познакомиться с учебной литературой Вам поможет аннотированный план выпуска литературы на 1979 год (вузы и техникумы), который имеется в книжных магазинах.

Предварительные заявки на книги Вы можете сделать в магазинах Книготорга или потребительской кооперации.