И. Л. КАЛИХМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ по математическому программированию

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
экономических специальностей вузов

Москва
«ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1975

517.8
К17
УДК 512+517+518(076)

Рецензент: кафедра прикладной математики М[illegible]

Калихман И. Л.
К 17 Сборник задач по математическому программированию. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., «Высш. школа», 1975.
270 с. с ил.

Настоящий сборник содержит примеры и задачи по курсу математического программирования. Примеры предназначены для освоения вычислительных методов, задачи, преимущественно экономического содержания, — для упражнений в приложении этих методов к экономическим исследованиям.

Большинство параграфов содержит справочный теоретический материал и подробный разбор типовых примеров.

Предназначается в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей вузов.

$К \frac{20203-015}{001(01)-75}$ 83—75 517.8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник предназначен в качестве учебного пособия при прохождении курса «Математическое программирование» студентами финансовых и экономических специальностей вузов, изучающих этот курс по общей программе в объеме примерно 100 учебных часов.

В отличие от первого издания задачник существенно переработан и дополнен, главным образом, за счет введения глав IX—XII, содержащих элементы теории игр и нелинейное программирование, в соответствии с утвержденной МВ и ССО СССР в 1970 г. программой курса «Математическое программирование». В изложении первых восьми глав автор придерживался последовательности и характера изложения материала, соответствующего учебному пособию «Линейная алгебра и программирование», опубликованного автором в 1969 г. В связи с этим здесь отсутствуют теоретические справки и приводится лишь значительное число подробно разобранных решений типовых примеров и задач.

В последних четырех главах отсутствие подходящего и доступного студентам единого учебного пособия, существенно не выходящего за пределы программы, вынудило автора включить в начале каждого параграфа минимум справочного теоретического материала. Этот материал так же, как и в предыдущих главах, дополнен подробным решением типовых примеров и задач, что создает необходимую базу для самостоятельного решения задач.

Основным вычислительным инструментом, который в различных модификациях используется в настоящем задачнике при решении задач как линейного, так и нелинейного программирования, является симплексный метод. Именно этим и диктуется отбор задач и применяемых методов их решения. Так за бортом оказались многие весьма эффективные при решении задач дискретного программирования комбинаторные методы, приближенные итерационные методы решения игровых задач, методы, использующие так называемые «штрафные функции», и т. д. В силу этого в некоторых задачах пришлось ограничить задание составлением модели, а не получением решения (например, § 3 гл. X). В то же время автор сознательно шел на упрощение многих примеров и задач, стремясь сделать их решение доступным «ручному» счету.

При отборе задач использовалась весьма обширная литература по линейному и нелинейному программированию.

ГЛАВА I

Метод последовательных исключений

§ 1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

1. Решить с помощью таблиц Гаусса следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Расчеты проводим в таблице Гаусса согласно алгоритму метода последовательных исключений. В исходной части таблицы записываем расширенную матрицу системы и дополняем ее последним контрольным столбцом, элементы которого $\tilde{a}_i$ получаем путем суммирования по строкам таблицы.

№ итерации	x_1	x_2	x_3	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
Исходная система	2	–1	1	3	5
·2	$\boxed{1}$	3	–2	1	3
	0	1	2	8	11
I	0	–7	5	1	–1
	1	3	–2	1	3
7	–3 0	$\boxed{1}$	2	8	11
II :19	0	0	$\boxed{19}$	57	76
	1	0	–8	–23	–30
	0	1	2	8	11
III ·8	0	0	1	3	4
	1	0	0	1	2
	0	1	0	2	3

Каждая последовательная итерация метода начинается с выбора разрешающего элемента в предыдущей части таблицы. Для упрощения вычислений удобно в качестве разрешающего выбирать элемент, равный 1. Если же такой выбор окажется невозможным, то для уменьшения погрешностей при округлениях лучше в качестве разрешающего принимать элемент, наибольший по абсолютной величине. Хотя при выполнении практических расчетов принято нули в таблице не помещать, мы из методических соображений будем все же их указывать.

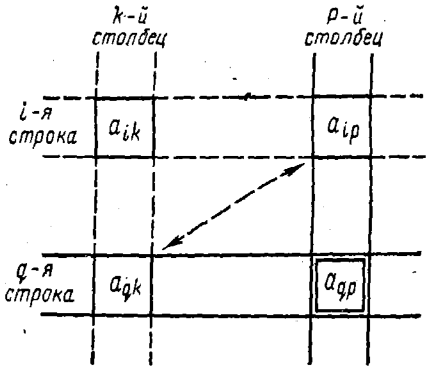

РИС. 1

I итерацию начинаем [illegible]бора элемента $a_{21} = 1$, [illegible]ый выделяем рамкой. [illegible]е рассчитываем элементы разрешающей (2-й) [illegible] по формуле

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}},$$

[illegible]е $k = 0;\ 1;\ 2, \ldots,$ т. е. [illegible]утем деления их всех на [illegible]азрешающий элемент. По[illegible]ольку в данном приме[illegible]е $a_{qp} = a_{21} = 1$, все элементы разрешающей строки переписываются без изменения. Наконец, вычисляются элементы остальных строк по формуле

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{qk} a_{ip}}{a_{qp}}, \quad \text{где} \begin{cases} i = 1,\ 2, \ldots, \\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \end{cases}\Bigg\}.$$

Так, например,

$$a'_{12} = -1 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -7; \quad a'_{13} = 1 - \frac{2 \cdot (-2)}{1} = 5;$$

$$a'_{10} = 3 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 1; \quad \tilde{a}'_1 = 5 - \frac{2 \cdot 3}{1} = -1 \text{ и т. д.}$$

Расчет по последней формуле практически удобно производить, пользуясь мнемоническим «правилом прямоугольника», наглядно показанным на рис. 1. При этом сначала отмечаются единичные столбцы (в том числе и «новый» единичный столбец на месте разрешающего), а затем вычисляются элементы по строкам. После определения последнего контрольного элемента строки производится сравнение его с суммой всех предшествующих элементов. Так, например, для 1-й строки получаем $-7 + 5 + 1 = -1$ и $\tilde{a}'_1 = -1$, следовательно, расчет произведен правильно и можно перейти к вычислениям элементов следующей (3-й) строки.

На II итерации за разрешающий выбран элемент $a'_{32} = 1$ и на III итерации — элемент $a''_{13} = 19$.

После III итерации все три строки стали разрешающими. Система оказалась *определенной*, имеющей решение

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

2. Исследовать и решить следующую систему у нений:

$$\left.\begin{aligned} x_1+\ 2x_2+\ 3x_3+\ x_4&=1\\ 3x_1+13x_2+13x_3+5x_4&=3\\ x_1+\ 5x_2+\ 3x_3+\ x_4&=7\\ 3x_1+\ 7x_2+\ 7x_3+2x_4&=19 \end{aligned}\right\}.$$

Решение.

№ итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	a_{i0}	
Исходная система	$\boxed{1}$	2	3	1	1	8
	3	13	13	5	3	37
	1	5	3	1	7	17
	3	7	7	2	12	31
	4	5	6	1	19	35
I	1	2	3	1	1	8
	0	7	4	2	0	13
	0	3	0	0	6	9
	0	$\boxed{11}$	—2	—1	9	7
	0	—3	—6	—3	15	3
II	1	0	7	3	—17	—6
	0	0	18	9	—63	—36
	0	0	6	3	—21	—12
	0	1	—2	—1	9	7
	0	0	$\boxed{-12}$	—6	42	24
III	1	0	0	—1/2	15/2	8
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	2	3
	0	0	1	1/2	—7/2	—2

После III итерации два уравнения (2-е и 3-е) обратились ждественные равенства 0 = 0. Оставшиеся три строки все оказал разрешающими, поэтому расчет закончен. Так как всего оказал три единичных столбца при четырех неизвестных, то система ур нений *неопределенная.*

Ее общее решение, полученное после III итерации, тако

$$x_1=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}x_4;\quad x_2=2;\quad x_3=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}x_4.$$

3. Исследовать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x_1+12x_2+19x_3+25x_4&=25\\ 10x_1+22x_2+16x_3+39x_4&=25\\ 5x_1+12x_2+9x_3+25x_4&=30\\ 20x_1+46x_2+34x_3+89x_4&=70 \end{aligned}\right\}.$$

Решение.

Итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
Исходная система	$\boxed{5}$	12	19	25	25	86
	10	22	16	39	25	112
	5	12	9	25	30	81
	20	46	34	89	70	259
I	1	12/5	19/5	5	5	86/5
	0	—2	—22	—11	—25	—60
	0	0	$\boxed{-10}$	0	5	—5
	0	—2	—42	—11	—30	—85
II	1	12/5	0	5	69/10	153/10
	0	$\boxed{-2}$	0	—11	—36	—49
	0	0	1	0	—1/2	1/2
	0	—2	0	—11	—51	—64

После II итерации получили два уравнения (2-я и 4-я строки) одинаковыми левыми частями и различными свободными членами:

$$-2x_2-11x_4=-36 \quad \text{и} \quad -2x_2-11x_4=-51.$$

Очевидно, что они не могут одновременно удовлетворяться ни при таких значениях x_2 и x_4, т. е. система уравнений *несовместная*. Если бы мы, не обратив внимания на этот факт, выполнили итерацию с разрешающим элементом $a''_{22}=-2$, то в 4-й строке получили бы противоречивое равенство $0=-15$.

4. Исследовать и решить (в случае совместности) следующие системы уравнений, пользуясь таблицами Гаусса:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x_1-2x_2-x_3+3x_4&=5\\ 2x_1-4x_2-2x_3+6x_4&=10\\ 2x_1+x_2+x_4&=20 \end{aligned}\right\};$$

2) $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+7x_3+x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3+5x_4=8 \end{array}\right\};$$

3) $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=5 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=3 \\ 3x_1+2x_2+8x_3+4x_4=5 \\ 3x_1+4x_2+14x_3+9x_4=4 \end{array}\right\};$$

4) $$\left.\begin{array}{l} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4=5 \\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4=-1 \\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4=7 \\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4=8 \end{array}\right\};$$

5) $$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+4x_3+4x_4+9x_5=10 \\ 2x_1+2x_2+17x_3+17x_4+82x_5=84 \\ 2x_1+3x_3-x_4+4x_5=6 \\ x_2+4x_3+12x_4+27x_5=27 \\ x_1+2x_2+2x_3+10x_4=11 \end{array}\right\};$$

6) $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 5x_1+12x_2+5x_3+3x_4=10 \\ 6x_1-x_2-2x_3+5x_4=-2 \end{array}\right\};$$

7) $$\left.\begin{array}{l} 3x_1+5x_2+10x_3+14x_4+18x_5=14 \\ x_1+x_2+4x_3+6x_4+8x_5=8 \\ 5x_1-4x_2+19x_3+25x_4+26x_5=74 \\ 2x_1-7x_2+7x_3+7x_4+2x_5=57 \\ x_1-11x_2+2x_3+4x_4-8x_5=50 \end{array}\right\};$$

8) $$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ 6x_1+8x_2-14x_3=17 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+11x_2-16x_3=21 \end{array}\right\};$$

9) $$\left.\begin{array}{l} 3x_1-x_2+2x_3+5x_4=-1 \\ 3x_1-3x_2+6x_3+15x_4=-3 \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8 \end{array}\right\};$$

$$10)\quad \left.\begin{aligned} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+\ 8x_5&=\ 5\\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4+15x_5&=10\\ 4x_1-2x_2+\ x_3+2x_4+\ 2x_5&=\ 1\\ 2x_1-\ x_2+8x_3+5x_4+11x_5&=\ 3 \end{aligned}\right\}.$$

5. Показать, что элементы контрольного столбца, преобразуемые по общим формулам последовательных исключений, будут на каждой итерации равны сумме всех элементов, расположенных в той же строке слева.

6. Доказать эквивалентность преобразований системы уравнений по методу Гаусса.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

7. Найти матрицу, обратную к следующей:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

№ итерации	Матрица A			Матрица E			$\tilde{a}_i$
Исходные матрицы	—3	2	4	1	0	0	4
	2	$\boxed{1}$	0	0	1	0	4
	1	0	1	0	0	1	3
I	—7	0	4	1	—2	0	—4
	2	1	0	0	1	0	4
	1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3
II	$\boxed{-11}$	0	0	1	—2	—4	—16
	2	1	0	0	1	0	4
	1	0	1	0	0	1	3
III	1	0	0	—1/11	2/11	4/11	16/11
	0	1	0	2/11	7/11	—8/11	12/11
	0	0	1	1/11	—2/11	7/11	17/11

Записываем в левой части таблицы Гаусса заданную матрицу, рава — единичную матрицу того же порядка. Последовательные преобразования строк таблицы производим так же, как и при решении уравнений, добиваясь в левой части таблицы образования единичных столбцов. Если исходная матрица не вырожденная [т. е. $D(A) \neq 0$], то после проведения n итераций (где n — порядок матрицы) получим n единичных столбцов. Если исходная матрица вырожденная, то после некоторой итерации в левой части таблицы появится ненулевая строка. Это будет говорить о том, что обратная матрица не существует. Если в образовавшихся на последней итерации n единичных столбцах единицы располагаются по главной диагонали, то в правой части таблицы получаем обратную матрицу. Так, в данном случае имеем:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Если бы единичные столбцы располагались неупорядоченно, то необходимо было бы путем перестановки строк добиться образования в левой части таблицы единичной матрицы.

8. Для следующих матриц найти обратные:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 10 & -10 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 14 & 9 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 5 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 6 & 7 \\ 10 & -22 & 9 & 0 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить с помощью метода последовательных исключений определитель

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. Определители можно вычислять с помощью того же метода последовательных исключений. Конечная цель этих преобразований — приведение определителя к треугольному виду, после чего его вычисление сводится к перемножению элементов, стоящих по диагонали. Действительно,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Для того чтобы привести определитель к треугольному виду, применяют те же два вида эквивалентных преобразований: 1) умножение строки на отличный от нуля множитель и 2) прибавление к строке другой строки. При этом, в отличие от предыдущего, следует учитывать, что если второй вид преобразований не меняет величины определителя, то умножение строки на некоторый множитель k приводит к умножению величины определителя на тот же множитель.

Кроме того, в отличие от преобразований матрицы удобнее выбирать разрешающие элементы только по главной диагонали. Если же на какой-то итерации соответствующий диагональный элемент окажется равным нулю, то это осложнение устраняется путем перестановки строк или столбцов. Очевидно, каждая такая перестановка вызовет изменение знака определителя на противоположный, что следует учитывать в окончательном результате.

D	$\boxed{4}$	3	5
	8	6	3
	7	4	2
$\frac{1}{4}D$	1	3/4	5/4
	0	0	—7
	0	—5/4	—27/4
$-\frac{1}{4}D$	1	3/4	5/4
	0	—5/4	—27/4
	0	0	—7

Наконец, поскольку нас интересует приведение определителя к треугольному виду, на каждой итерации обращаем в нуль только элементы, лежащие ниже разрешающего. После I итерации очередной диагональный элемент $a'_{22}=0$. Поэтому переставляем 2-ю и 3-ю строки. Полученный после итерации определитель вычисляется просто:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & -5/4 & -27/4 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}=1\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot(-7)=\frac{35}{4}.$$

Для нахождения определителя D необходимо компенсировать деление на разрешающий элемент $a_{11}=4$ и изменение знака на II итерации. Следовательно, $D=-4\,D_1=-35$.

10. Вычислить с помощью метода последовательных исключений следующие определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix};\qquad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix};\qquad 3)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix};\qquad 5)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix};\qquad 6)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОКРАТНОГО ЗАМЕЩЕНИЯ

11. Выполнить одно преобразование однократного замещения в следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + \underline{x_2} - x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ x_1 \qquad + 2x_3 + \underline{x_4} \qquad &= -2 \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 \qquad + \underline{x_5} &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Система приведена к единичному базису, состоящему из единичных векторов-коэффициентов $\bar{a}_2 = (1,\ 0,\ 0)$, $\bar{a}_4 = (0,\ 1,\ 0)$ и $\bar{a}_5 = (0,\ 0,\ 1)$.

Базисные неизвестные, соответствующие этому базису, в уравнениях подчеркнуты. Для выполнения одного преобразования однократного замещения нужно выбрать среди не единичных столбцов коэффициентов отличный от нуля разрешающий элемент a_{qp} и провести одно преобразование схемы последовательных исключений. Тогда разрешающий (p-й) столбец коэффициентов превратится в единичный и, наоборот, единичный столбец, имеющий координату 1, в разрешающем q-м уравнении станет не единичным.

Это соответствует переходу неизвестного x_p в число базисных и, наоборот, выводу из числа базисных того неизвестного, относительно которого было разрешено q-е уравнение. Практически удобно указанные расчеты располагать, как и в предыдущих параграфах, в таблицах Гаусса. Для преобразования выбираем разрешающий элемент $a_{23} = 2$ ($p = 2$ и $q = 3$). После преобразования единичный базис составят векторы $\bar{a}_2$, $\bar{a}_5$ и $\bar{a}_3$ (вместо $\bar{a}_4$).

Новыми базисными неизвестными, относительно которых разрешена преобразованная система, являются x_2, x_5 и x_3 (вместо x_4).

№ итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
Исходная система	2	1	—1	0	0	3	5
	1	0	$\boxed{2}$	1	0	—2	2
	3	0	—2	0	1	1	3
I	5/2	1	0	1/2	0	2	6
	1/2	0	1	1/2	0	—1	1
	4	0	0	1	1	—1	5

12. Выполнить одну итерацию преобразования однократного замещения в следующих системах уравнений:

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_3 = -5 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_4 = 1 \end{array}\right\};$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ -x_3 - 3x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + 3x_5 = -2 \end{array}\right\};$$

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 - x_3 + x_6 = 4 \end{array}\right\};$$

$$4)\quad \left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_4 - 3x_6 = 4 \\ x_2 + 2x_6 = 1 \\ x_3 - x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_4 + x_5 = 6 \end{array}\right\}.$$

13. Найти все базисные решения следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 - 2x_5 = 3 \end{array}\right\}.$$

Решение. Базисные решения, т. е. решения, получаемые при приравнивании свободных неизвестных нулю, проще находить, если система приведена к единичному базису. Так, например, исходному заданию системы соответствует базисное решение $\bar{X}_0 = (0, 2, 3, 1, 0)$, получаемое непосредственно из системы, если в ней положить свободные неизвестные x_1 и x_5 равными нулю. Поэтому отыскание всех базисных решений сводится к последовательному преобразованию системы к всевозможным единичным базисам, а этого, в свою очередь, можно достигнуть рядом последовательных преобразований однократного замещения. При этом нужно лишь следить за тем, чтобы в процессе преобразований не повторялся ранее встречавшийся базис. Для этого выпишем всевозможные пары свободных переменных.

Так как свободных неизвестных $n - r = 5 - 3 = 2$, то всевозможные пары неизвестных (всего их будет $C_5^2 = 10$), которые могут оказаться свободными, таковы:

$$(x_1,\ x_2);\ (x_1,\ x_3);\ (x_1,\ x_4);\ (x_1,\ x_5);\ (x_2,\ x_3);\ (x_2,\ x_4);$$
$$(x_2,\ x_5);\ (x_3,\ x_4);\ (x_3,\ x_5);\ (x_4,\ x_5).$$

Будем строить последовательность преобразований так, чтобы в определенном порядке перебрать все эти группы неизвестных. В исходной таблице свободными неизвестными являются x_1 и x_5 (им соответствуют не единичные столбцы коэффициентов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_5$). Этой системе, как уже указывалось, соответствует базисное решение $\bar{X}_0 = (0, 2, 3, 1, 0)$. Выбрав за разрешающий элемент $a_{11} = 1$ и переходя к следующей матрице, получаем новую пару свободных неизвестных x_2, x_5 и соответствующее базисное решение $\bar{X}_1 = (2, 0, 3, -5, 0)$ и т. д.

Всего таким образом можно будет выполнить 8 преобразований однократного замещения, в результате которых будет найдено 9 (включая исходное) базисных решений.

Единственная не использованная пара свободных неизвестных x_3 и x_5 не определяет базисного решения, так как при этом базисными оказались бы неизвестные x_1, x_2, x_4, столбцы коэффициентов при которых линейно зависимы ($\bar{a}_1 - \bar{a}_3 - 3\bar{a}_4 = 0$).

14. Найти с помощью преобразований однократного замещения все базисные решения следующих систем уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 \quad - x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}\right\};\qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 9x_3 \quad &= 4 \\ x_1 \quad - 3x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ - x_2 \quad + x_4 + x_5 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 \quad &= 2 \end{aligned}\right\};$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 \quad + 3x_3 + x_4 \quad &= 6 \\ x_2 - x_3 \qquad &= 4 \\ -3x_1 \quad - x_3 \quad - x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

§ 4. СИМПЛЕКСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПОРНЫЕ РЕШЕНИЯ

15. Найти все опорные решения системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1+3x_2+x_3 \qquad\qquad =9 \\ \quad x_1+\ x_2 \qquad +x_4 \qquad =8 \\ \quad 3x_1-2x_2 \qquad\qquad +x_5=9 \end{array}\right\}.$$

Решение. Рассматриваемая система может иметь $C_5^3=10$ базисных решений, однако только некоторые из них имеют все неотрицательные значения неизвестных, т. е. являются опорными. Конечно, их можно выделить, если найдены все базисные решения, но такой путь ведет к чрезвычайно сложным расчетам. Если же выбирать разрешающий элемент из дополнительных условий, то те же преобразования однократного замещения обеспечат переход не просто к базисным, а к опорным решениям. Эти дополнительные условия заключаются в следующем:

1) *разрешающий столбец (номер p) выбирается так, чтобы в нем оказался хотя бы один положительный элемент;*

2) *разрешающая строка (номер q) выбирается из условия, чтобы отношение* $\frac{a_{q0}}{a_{qp}}$ *было наименьшим из значений* $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$ *для тех i, при которых* $a_{ip}>0$.

После выбора разрешающего элемента дальнейшие вычисления ведутся согласно обычным правилам преобразований однократного замещения (см. задачи предыдущего параграфа).

Как и при определении базисных решений, здесь также необходимо следить за тем, чтобы на какой-либо итерации не вернуться к ранее найденному опорному решению. Это условие дополнительно ограничивает выбор разрешающего элемента. После сделанных предварительных замечаний перейдем к решению заданного примера.

На исходном этапе выбираем за разрешающий 1-й столбец ($p=1$), имеющий два положительных элемента. Для выбора разрешающей строки вычисляем во 2-й и 3-й строках (где $a_{ip}=a_{i1}>0$) отношения $\frac{a_{20}}{a_{21}}=8$ и $\frac{a_{30}}{a_{31}}=\frac{9}{3}=3$. Наименьшим оказалось отношение в 3-й строке, которую и выбираем как разрешающую. После выполнения I итерации с выбранным разрешающим элементом $a'_{31}=3$ получаем опорное решение X_1.

Теперь выбираем 2-й разрешающий столбец, имеющий положительные элементы $a_{12}={}^5/_3$ и $a_{22}={}^5/_3$, и 2-ю разрешающую строку $\left(\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}=\min\{9,\ 3\}=3\right)$.

После выполнения II итерации с выбранным таким образом разрешающим элементом $a''_{qp}=a''_{22}={}^5/_3$ получаем новое опорное решение X_2. Аналогично после III итерации приходим к опорному решению X_3.

Казалось бы, что на этом этапе можно было бы выбрать в качестве разрешающего 3-й столбец, как имеющий положительные элементы, и соответствующую ему разрешающую строку. Однако нетрудно видеть, что дальнейшее преобразование в таком случае приведет к найденному выше опорному решению.

№ итерации	Баз. перем.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{i0}	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$	Опорные решения
Исходная система	x_3	—2	3	1	0	0	9	—	$\bar{X}_0=(0, 0, 9, 8, 9)$
	x_4	1	1	0	1	0	8	8	
	x_5	$\boxed{3}$	—2	0	0	1	9	3	
I	x_3	0	5/3	1	0	2/3	15	9	$\bar{X}_1=(3, 0, 15, 5, 0)$
	x_4	0	$\boxed{5/3}$	0	1	—1/3	5	3	
	x_1	1	—2/3	0	0	1/3	3	—	
II	x_3	0	0	1	—1	1	10	10	$\bar{X}_2=(5, 3, 10, 0, 0)$
	x_2	0	1	0	3/5	—1/5	3	—	
	x_1	1	0	0	2/5	1/5	5	25	
III	x_5	0	0	1	—1	1	10	—	$\bar{X}_3=(3, 5, 0, 0, 10)$
	x_2	0	1	1/5	2/5	0	5	25/2	
	x_1	1	0	—1/5	3/5	0	3	5	
IV	x_5	5/3	0	2/3	0	1	15		$\bar{X}_4=(0, 3, 0, 5, 15)$
	x_2	—2/3	1	1/3	0	0	3		
	x_4	5/3	0	—1/3	1	0	5		

Действительно, если выбрать $p=3$, то разрешающей окажется 1-я строка $\left(\min\left\{\frac{10}{1}, \frac{25}{1}\right\}=10\right)$. Но преобразование с разрешающим элементом $a_{13}^{IV}=1$ приведет к замене базисного неизвестного x_5 на x_3, что соответствует опорному решению $\bar{X}_2$.

Если же выбрать $p=4$, то $q=3\left(\text{так как } \min\left\{\frac{25}{2}, 5\right\}=5\right)$, т. е. $a_{pq}^{IV}=a_{34}^{IV}=3/5$. В этом случае произойдет замещение базисного неизвестного x_1 на x_4, что соответствует новому опорному решению $\bar{X}_4$, найденному *на IV (и последней) итерации*.

Больше опорных решений система не имеет, так как возможный выбор разрешающего элемента в 1-м ($a_{13}^{V}=5/3$) или в 3-м ($a_{23}^{V}=1/3$) столбцах после IV итерации приведет, соответственно, к ранее найденным опорным решениям $\bar{X}_3$ или $\bar{X}_0$.

16. Выполнить одну итерацию симплексных преобразований и найти таким путем новое опорное решение для следующих систем уравнений:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{array}\right\};\quad 2)\ \left.\begin{array}{l} x_2 + 3x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_4 = 4 \\ x_4 + x_5 = 5 \end{array}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_5 = 4 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_6 = 1 \end{array}\right\};$$

$$4)\ \left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_6 = 4 \end{array}\right\}.$$

17. Найти с помощью симплексных преобразований все опорные решения следующих систем уравнений:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21 \end{array}\right\};$$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 36 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{array}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{array}\right\};\quad 4)\ \left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 12 \end{array}\right\};$$

$$5)\ \left.\begin{array}{l} x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 33 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_6 = 3 \end{array}\right\};$$

$$6)\ \left.\begin{array}{l} x_1 - x_5 + x_6 = 3 \\ x_2 - x_5 + 4x_6 = 21 \\ x_3 + 4x_5 - x_6 = 21 \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3 \end{array}\right\}.$$

18. Найти исходное опорное решение следующей системы уравнений, приведя ее к единичному базису при неотрицательных свободных членах:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-3x_4+4x_5+\ x_6 &= -6 \\ x_1-x_2+x_3+5x_4-4x_5+6x_6 &= 8 \\ x_2-x_3-6x_4+5x_5-4x_6 &= -12 \\ x_1+\ x_4+3x_5+\ x_6+x_7 &= -3 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Система не приведена к единичному базису. Поэтому начинаем с преобразования системы методом последовательных исключений.

№ итерации	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
Исходная система	$\boxed{1}$	1	0	−3	4	1	0	−6	−2
	1	−1	1	5	−4	6	0	8	16
	0	1	−1	−6	5	−4	0	−12	−17
	1	0	0	1	3	1	1	−3	4
I	1	1	0	−3	4	1	0	−6	−2
	0	$\boxed{-2}$	1	8	−8	5	0	14	18
	0	1	−1	−6	5	−4	0	−12	−17
	0	−1	0	4	−1	0	1	3	6
II	1	0	1/2	1	0	7/2	0	1	7
	0	1	−1/2	−4	4	−5/2	0	−7	−9
	0	0	$\boxed{-1/2}$	−2	1	−3/2	0	−5	−8
	0	0	−1/2	0	3	−5/2	1	−4	−3
III	1	0	0	−1	1	2	0	−2	1
	0	1	0	−2	3	−1	0	−4	−3
	0	0	1	4	−2	3	0	10	16
	0	0	0	2	2	−1	1	−1	3

После III итерации система оказалась приведенной к единичному базису ($\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_7$), однако свободные члены в трех уравнениях из четырех оказались отрицательными. Поэтому данной системе соответствует исходное базисное, но не опорное решение $\bar{X}=(-2, -4, 10, 0, 0, 0, -1)$.

Среди отрицательных свободных членов выбираем наибольший по абсолютной величине ($a_{20}=-4$) и вычтем почленно выделенное таким образом 2-е уравнение из 1-го и 4-го (с отрицательными свободными членами).

Само же выделенное уравнение (2-ю строку) перепишем, умножив все коэффициенты на −1 (3-е уравнение остается без изменений). Эти и все дальнейшие расчеты будем выполнять в той же таблице, как бы продолжая последовательные итерации. После выполнения указанных действий получим следующую таблицу:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_{i0}	$\tilde{a}_i$	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
IV	1	−1	0	1	−2	3	0	2	4	2
	0	−1	0	2	−3	1	0	4	3	2
	0	0	1	4	−2	3	0	10	16	5/2
	0	−1	0	$\boxed{4}$	−1	0	1	3	6	3/4

В полученной системе уравнений все свободные члены оказались положительными, 1, 3, 4-е уравнения разрешены относительно прежних базисных неизвестных x_1, x_3 и x_7. Лишь 2-е (выделенное) уравнение оказалось не разрешенным относительно базисного неизвестного.

Дальнейшие преобразования системы будем проводить согласно правилам симплексных преобразований, выбирая разрешающий столбец из того условия, чтобы он имел в выделенной (2-й) строке положительный элемент. Этому условию удовлетворяют 4-й и 6-й столбцы. Выберем в качестве разрешающего 4-й столбец (так как $a_{24} = 2 > 0$). Для выбора разрешающей строки вычисляем отношения $\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$. Наименьшее отношение оказалось в 4-й строке $\left(\frac{a_{40}}{a_{44}} = \frac{3}{4}\right)$, которую и берем в качестве разрешающей. Выполнив преобразование однократного замещения с выбранным разрешающим элементом $a'_{pq} = a'_{44} = 4$, переходим к следующей таблице (V итерация):

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_{i0}	$\tilde{a}_i$	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
V	1	−3/4	0	0	−7/4	$\boxed{3}$	−1/4	5/4	5/2	5/12
	0	−1/2	0	0	−5/2	1	−1/2	5/2	0	5/2
	0	1	1	0	−1	3	−1	7	10	7/3
	0	−1/4	0	1	−1/4	0	1/4	3/4	3/2	
VI	1/3	−1/4	0	0	−7/12	1	−1/12	5/12	5/6	
	−1/3	−1/4	0	0	−23/12	0	−5/12	25/12	−5/6	
	−1	7/4	1	0	3/4	0	−3/4	23/4	15/2	
	0	−1/4	0	1	−1/4	0	−1/4	3/4	3/2	

В полученной после V итерации системе выделенное 2-е уравнение снова оказалось не разрешенным относительно базисного неизвестного (1, 3 и 4-е уравнения разрешены относительно x_1, x_3 и x_4), но свободный член в этом уравнении уменьшился (стал $^5/_2$ вместо 4). Поэтому выполним еще одну, VI итерацию. На VI итерации разрешающим столбцом может служить только 6-й — единственный, имеющий положительный элемент $a_{26} = 1 > 0$ в выделенной 2-й строке. Разрешающей строкой является 1-я.

После VI итерации приходим к таблице, в которой выделенная 2-я строка не имеет ни одного положительного элемента, кроме свободного члена. Очевидно, что процесс последовательных преобразований на этом обрывается, так как становится невозможным выбор разрешающего столбца по указанному выше принципу. Нетрудно прийти к выводу, что в этом случае исходная система уравнений не имеет ни одного решения с неотрицательными значениями неизвестных, в том числе и опорного решения, или, как говорят, несовместна в области неотрицательных (допустимых) решений. Действительно, 2-е уравнение, приведенное на VI итерации к виду $-{}^1/_3x_1-{}^1/_4x_2-{}^{23}/_{12}x_5-{}^5/_{12}x_7 = {}^{25}/_{12}$, не может удовлетворяться при неотрицательных значениях неизвестных x_1, x_2, x_5 и x_7.

В случае, если исходная система имела хотя бы одно опорное решение, оно было бы получено после конечного числа описанных выше итераций.

19. Найти с помощью приведения к единичному базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_3, \bar{a}_5, \bar{a}_7\}$ опорное решение следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad - x_4 + x_5 + 2x_6 &= -1 \\ x_2 - 4x_4 + 3x_5 - x_6 &= -4 \\ x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 3x_6 &= 10 \\ 2x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 &= -1 \end{aligned}\right\} .$$

20. Найти исходное опорное решение в следующих системах уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}; \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x_1 \quad + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 \quad - x_4 + 2x_5 &= -3 \\ x_2 \quad + 1/2x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 4 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}\right\};$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 \quad - x_5 - x_6 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}\right\};$$

$$5)\ \left.\begin{aligned} x_1 \quad + x_5 + x_6 &= 4 \\ x_2 \quad + 2x_5 + 3x_6 &= 0 \\ -x_3 \quad - x_5 + 2x_6 &= 8 \\ x_4 + 2x_5 - x_6 &= 4 \end{aligned}\right\} .$$

ГЛАВА II

Применение матричной алгебры в экономических расчетах. Балансовые модели

21. Химическое предприятие состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции. В следующей таблице указаны расходные коэффициенты («прямые» затраты) a_{ik} единиц продукции i-го цеха, используемые как «сырье» («промежуточный продукт») для выпуска единицы продукции k-го цеха, а также количество единиц y_i продукции i-го цеха, предназначенных для реализации (конечный продукт).

Цеха	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт y_i
	I	II	III	
I	0	0,2	0	200
II	0,2	0	0,1	100
III	0	0,1	0,2	300

Определить:

1) коэффициенты полных затрат;
2) валовой выпуск (план) для каждого цеха;
3) производственную программу цехов;
4) коэффициенты косвенных затрат.

Решение. Обозначим производственную программу завода через $X = (x_1, x_2, x_3)$, где x_i есть валовой выпуск продукции i-го цеха, а план выпуска товарной продукции — через $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$. Кроме того, введем матрицу $A = \| a_{ik} \|$ расходных коэффициентов, указанных в таблице. Тогда производственные взаимосвязи завода могут быть представлены следующей системой трех уравнений:

$$x_i - \underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3)}_{\text{внутрипроизводственное потребление}} = y_i \quad (\text{где } i = 1,\ 2,\ 3),$$

или, в матричной форме,

$$\overline{X} - A\overline{X} = \overline{Y}.$$

Записав последнее уравнение в виде $(E - A)\,\overline{X} = \overline{Y}$, где E — единичная матрица третьего порядка, представим его решение через обратную матрицу:

$$\overline{X} = (E - A)^{-1}\,\overline{Y}. \qquad (*)$$

1) Элементы обратной матрицы $(E - A)^{-1} = \| s_{ik} \|$ представляют собой искомые коэффициенты полных внутрипроизводственных затрат.

Выполнив расчеты, указанные в предыдущей главе (см. § 2), получим *

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, для выпуска единицы продукции I, II и III цехов необходимо затратить продукции I-го цеха соответственно 1,04; 0,21 и 0,03 единиц.

2) Для определения валового выпуска продукции цехов воспользуемся равенством (*):

$$\overline{X} = (E - A)^{-1}\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 187 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 238$, $x_2 = 187$ и $x_3 = 400$.

3) Производственную программу каждого из цехов можно определить из соотношения $x_{ik} = a_{ik}x_k$ ($k = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$). В результате получим следующую таблицу:

Цеха	Внутрипроизводственное потребление			Итого $\Sigma\, x_{ik}$	Конечный продукт y_i	Валовой выпуск x_i
	I	II	III			
I	0	37	0	37	200	238
II	48	0	40	88	100	187
III	0	19	80	99	300	400

4) Коэффициенты косвенных затрат найдем как разность между s_{ik} и a_{ik} или в матричной форме

$$(E - A)^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}01 & 0{,}03 \\ 0{,}01 & 1{,}06 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 1{,}07 \end{pmatrix}.$$

---

* Все расчеты с округлением до 0,01.

22. Дополнительно к данным предыдущей задачи в следующей таблице указаны расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующего цеха, трудоемкость продукции в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы соответствующего материала и оплата за 1 чел.-ч.

	Нормы расхода			Обозначения	Стоимость
	I	II	III		
Сырье а	1,4	2,4	0,8	$\bar{a}_4$	5
Сырье б	—	0,6	1,6	$\bar{a}_5$	12
Топливо	2,0	1,8	2,2	$\bar{a}_6$	2
Трудоемкость	10	20	20		1,2

Определить:

1) суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы;

2) коэффициенты прямых затрат сырья, топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;

3) расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;

4) производственные затраты в рублях по цехам и на всю производственную программу завода;

5) производственные затраты на единицу конечной продукции.

Решение. 1) Суммарный расход сырья а можно получить, умножив соответствующую 1-ю строку таблицы на вектор X, т. е.

$$\bar{a}_4 X = (1{,}4;\ 2{,}4;\ 0{,}8)\begin{pmatrix}238\\187\\400\end{pmatrix} = 1102.$$

Аналогично можно получить расход сырья б и т. д. Все это удобно записать в виде произведения

$$\begin{pmatrix}1{,}4 & 2{,}4 & 0{,}8\\ 0 & 0{,}6 & 1{,}6\\ 2{,}0 & 1{,}8 & 2{,}2\\ 10 & 20 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}238\\187\\400\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1102\\752\\1692\\1412\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{сырье а}\\ \text{сырье б}\\ \text{топливо}\\ \text{человеко-часов.}\end{array}$$

2) Расход сырья а на единицу конечной продукции I цеха $(y_1 = 1)$ найдем из выражения $1{,}4s_{11} + 2{,}4s_{21} + 0{,}8s_{31}$. Следовательно, соответствующие коэффициенты полных затрат сырья, топлива и труда на каждую единицу конечного продукта получим

из произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2,0 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,06 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1,98 & 2,94 & 1,37 \\ 0,17 & 0,84 & 2,11 \\ 2,52 & 2,61 & 3,09 \\ 15,20 & 24,80 & 28,30 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{сырье а} \\ \text{сырье б} \\ \text{топливо} \\ \text{труд.} \end{array} \end{array}$$

Таким образом, например, для изготовления $y_1 = 1$ необходимо затратить 1,98 ед. сырья а, 0,17 ед. сырья б, 2,52 ед. топлива и 15,2 чел.-ч.

3) Расход сырья, топлива и т. д. по каждому из цехов получим из умножения их расходных норм на соответствующие валовые выпуски по цехам. В результате получим матрицу полных расходов:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{сырье а} \\ \text{сырье б} \\ \text{топливо} \\ \text{труд} \end{array} & \begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3740 & 8000 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4) Производственные расходы по цехам можно получить путем умножения слева строки стоимостей (5; 12; 2; 1,2) на последнюю матрицу:

$$(5;\ 12;\ 2;\ 1,2)\cdot\begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3740 & 8000 \end{pmatrix} = (\overset{\mathrm{I}}{5473},\ \overset{\mathrm{II}}{8751},\ \overset{\mathrm{III}}{20640}).$$

5) Наконец, производственные затраты на единицу конечной продукции, необходимые для определения себестоимости продукции, можем найти путем умножения слева матрицы полных затрат, найденной в п. 2, на строку цен:

$$(5;\ 12;\ 2;\ 1,2)\begin{pmatrix} 1,98 & 2,94 & 1,37 \\ 0,17 & 0,84 & 2,11 \\ 2,52 & 2,61 & 3,09 \\ 15,2 & 24,8 & 28,3 \end{pmatrix} = (\overset{\mathrm{I}}{35,2};\ \overset{\mathrm{II}}{59,6};\ \overset{\mathrm{III}}{72,3}).$$

Таким образом, внутрипроизводственные затраты на единицу товарной продукции I, II и III цехов соответственно составляют: 35,2 руб., 59,6 руб. и 72,3 руб.

23. Предприятие выпускает три вида продукции в количестве, характеризующемся вектор-планом

$\bar{X} = (10, 7, 4)$. Для его изготовления используются 5 видов сырья. Известна матрица

$$A = \| a_{ik} \| = \begin{array}{cc} & \text{виды сырья} \\ \text{виды продукции} & \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \end{array},$$

где a_{ik} характеризует расход k-го вида сырья на 1 ед. i-го вида продукции. Наконец, вектор $\bar{C} = (7, 4, 5, 10, 2)$ задает стоимость 1 ед. каждого вида сырья.

Определить необходимое количество единиц сырья каждого вида для обеспечения плана, стоимость сырья для единицы каждого вида продукции и общую стоимость всего сырья для всей продукции.

24. В предыдущем примере задана дополнительно стоимость перевозки 1 ед. каждого вида сырья $T = (3, 2, 3, 6, 3)$.

Тогда матрица

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

характеризует стоимость сырья и стоимость его транспортировки. Найти AC_1', $\bar{X}\,(AC_1')$ и истолковать их экономически.

Найти суммарную стоимость сырья и транспортировки в виде $\bar{X}\,(AC_1)'\bar{e}$, где $\bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

25. Имеются 4 предприятия (1, 2, 3, 4), выпускающие 3 вида изделий (α, β и γ) и использующие при их производстве 2 вида сырьевых материалов (I и II). Данные о дневной производительности предприятий по каждому изделию (число изделий в день) и о затратах сырья на 1 ед. изделия (кг/шт.), а также число дней работы каждого предприятия и стоимость в рублях 1 кг сырья каждого вида помещены в следующей таблице:

Изделия	Производительность, шт./дн.				Затраты, кг/шт.	
	1	2	3	4	I	II
α	7	10	3	—	5	12
β	5	7	2	—	10	4
γ	—	4	8	4	6	8
Время работы и цены	100	120	50	200	30	20

Требуется определить (записав с помощью операций над матрицами):

1) суммарную производительность (за весь рабочий период) каждого предприятия по каждому из изделий;

2) количество каждого вида сырья, необходимого на каждом предприятии и для всех четырех предприятий;

3) размеры кредитов, которые необходимо предоставить каждому предприятию на закупку сырья.

Решение. Прежде всего обозначим через A матрицу производительности, через B — матрицу затрат сырья и через $\bar{C}$ — вектор цен; тогда

$$A=\begin{array}{cc} & \text{изделия} \\ \text{предприятия} & \begin{pmatrix}7&5&0\\10&7&4\\3&2&8\\0&0&4\end{pmatrix}\end{array};\quad B=\begin{array}{cc} & \text{сырье} \\ \text{изделия} & \begin{pmatrix}5&12\\10&4\\4&8\end{pmatrix}\end{array};\quad \bar{C}=(30,\ 20).$$

1) Для расчета суммарной производительности используем запись времени работы каждого из предприятий в виде диагональной матрицы:

$$T=\begin{pmatrix}100&0&0&0\\0&120&0&0\\0&0&50&0\\0&0&0&200\end{pmatrix}.$$

Тогда суммарная производительность (за рабочий период) выразится так:

$$TA=\begin{pmatrix}100&0&0&0\\0&120&0&0\\0&0&50&0\\0&0&0&200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&0\\10&7&4\\3&2&8\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{array}{cc} & \text{изделия} \\ \text{предприятия} & \begin{pmatrix}700&500&0\\1200&840&480\\150&100&400\\0&0&800\end{pmatrix}\end{array}.$$

2) Расход сырья на каждом предприятии найдется из выражения

$$(TA)\,B=\begin{pmatrix}700&500&0\\1200&840&480\\150&100&400\\0&0&800\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&12\\10&4\\6&8\end{pmatrix}=\begin{array}{cc} & \text{сырье} \\ \text{предприятия} & \begin{pmatrix}8500&10400\\17280&21600\\4150&5400\\4800&6400\end{pmatrix}\end{array}.$$

Суммарное количество I и II вида сырья по всем предприятиям можно получить, умножив последнюю матрицу слева на вектор $\bar{e}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$:

$$\bar{e}\,(TA)\,B=(1,\ 1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix}8500 & 10400\\ 17280 & 21600\\ 4150 & 5400\\ 4800 & 6400\end{pmatrix}=(34730,\ 43800).$$

3) Размеры кредитов определяются стоимостью сырья, используемого каждым предприятием, т. е. путем умножения матрицы $(TA)B$ на вектор цен, записанный в виде столбца:

$$(TA)\,B\bar{C}=\begin{pmatrix}8500 & 10400\\ 17280 & 21600\\ 4150 & 5400\\ 4800 & 6400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\ 20\end{pmatrix}=\text{предприятия}\begin{pmatrix}463000\\ 950400\\ 232500\\ 272000\end{pmatrix}.$$

26. Дан следующий межотраслевой баланс трехотраслевой модели хозяйства.

Отрасли потребления / Отрасли производства	1	2	3	Итого	Конечный продукт	Валовой выпуск
1	10	5	40	55	45	100
2	30	—	30	60	40	100
3	20	40	—	60	140	200
Итого	60	45	70	175		
Затраты труда	20	30	30	80		

Построить структурную матрицу и рассчитать коэффициенты полных затрат, валовой выпуск и полные затраты труда на новый ассортимент конечного продукта $\bar{Y}=(100,\ 50,\ 80)$.

Решение. Элементы структурной матрицы a_{ik} (коэффициенты прямых затрат) найдем путем деления соответствующих данных таблицы на величины валового выпуска x_i:

$$a_{11}=\frac{10}{100}=0{,}1;\quad a_{12}=\frac{5}{100}=0{,}05;\quad a_{13}=\frac{40}{200}=0{,}2;$$

$$a_{21}=\frac{30}{100}=0{,}3;\quad a_{22}=\frac{0}{100}=0;\quad a_{23}=\frac{30}{200}=0{,}15;$$

$$a_{31}=\frac{20}{100}=0{,}2;\quad a_{32}=\frac{40}{100}=0{,}4\ \text{ и }\ a_{33}=\frac{0}{200}=0.$$

Отсюда получим структурную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}15\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0\end{pmatrix}.$$

Коэффициенты полных затрат находим как элементы обратной матрицы $S = \|s_{ik}\| = (E - A)^{-1}$. Воспользовавшись способом вычисления обратной матрицы (см. задачу 7), получим

$$S=\begin{pmatrix}1{,}23 & 0{,}17 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}25 & 0{,}255\\ 0{,}42 & 0{,}48 & 1{,}16\end{pmatrix}.$$

Валовой выпуск, необходимый для обеспечения заданного конечного продукта, получим из соотношения

$$\overline{X}=S\overline{Y}=\begin{pmatrix}1{,}23 & 0{,}17 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}25 & 0{,}255\\ 0{,}42 & 0{,}48 & 1{,}16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 50\\ 80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}152\\ 126\\ 159\end{pmatrix}.$$

Коэффициенты прямых затрат труда найдем путем деления чисел последней строки таблицы на соответствующие значения валовых выпусков:

$$a_{41}=\frac{20}{100}=0{,}2;\quad a_{42}=\frac{30}{100}=0{,}3;\quad a_{48}=\frac{30}{200}=0{,}15,$$

или

$$\bar{a}_4=(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}15).$$

Коэффициенты полных затрат труда получим путем умножения строки коэффициентов прямых затрат на матрицу S, т. е.

$$(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}15)\cdot\begin{pmatrix}1{,}23 & 0{,}17 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}25 & 0{,}255\\ 0{,}42 & 0{,}48 & 1{,}16\end{pmatrix}=(0{,}438;\ 0{,}481;\ 0{,}302).$$

Полные затраты труда по всем отраслям составят

$$\bar{a}_4\overline{X}=0{,}2\cdot 152+0{,}3\cdot 126+0{,}15\cdot 159=92.$$

27. Дана следующая трехотраслевая линейная модель:

Потребление Производство	Сельское хозяйство	Промышленность	Прочие отрасли	Конечный продукт
1. Сельское хозяйство	10	60	15	15
2. Промышленность	60	120	10	110
3. Прочие отрасли	10	30	5	5

Определить коэффициенты полных затрат,

28. Дана следующая структурная матрица:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0\end{pmatrix}.$$

Построить баланс затрат выпуска продукции и рассчитать коэффициенты полных внутрипроизводственных затрат и валовой выпуск для вектора конечного продукта $\bar{Y}=(100,\ 500,\ 200)$.

29. Рассчитать в условиях задачи 27 полные затраты труда, если коэффициенты прямых затрат труда характеризуются вектор-строкой $\bar{a}_4=(0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}15)$.

30. Рассчитать матрицу коэффициентов косвенных затрат по следующей структурной матрице:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0\end{pmatrix}.$$

31. Пусть структурная матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}7 & 0{,}1\end{pmatrix}.$$

Найти ассортиментный вектор $\bar{Y}$ при $\bar{X}=\begin{pmatrix}120\\ 100\end{pmatrix}$.

32. Определить структурную матрицу A по следующей матрице коэффициентов полных затрат:

$$S=\begin{pmatrix}1{,}7 & 0{,}9\\ 1{,}2 & 1{,}7\end{pmatrix}.$$

33. Рассчитать по данным предыдущей задачи изменение валового выпуска продукции, необходимого для обеспечения изменения конечного продукта $\Delta\bar{Y}=\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix}$.

Решение. Имеем

$$\Delta X=S\,\Delta\bar{Y}=\begin{pmatrix}1{,}7 & 0{,}9\\ 1{,}2 & 1{,}7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\ 46\end{pmatrix}.$$

34. Определить на планируемый период производственную программу трех групп взаимосвязанных предприятий: группа № 1 выпускает станки, группа № 2 —

электромоторы и группа № 3 — металлопрокат. Известно, что данные предприятия должны дать народному хозяйству 15 000 шт. станков, 77 000 шт. электромоторов и 46 000 т проката. Нормы расхода этих изделий для взаимного и собственного воспроизводства приведены в следующей таблице:

Группы предприятий	Производственное потребление		
	1 (на 1 шт.)	2 (на 1 шт.)	3 (на 1 т)
1 (в шт.)	0,03	0,05	0,06
2 (в шт.)	0,02	0,03	0,01
3 (в т)	0,01	0,04	0,02

35. Может ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ быть структурной матрицей линейной балансовой модели?

Решение. Составив балансовые уравнения, получим $(E - A)\bar{X} = \bar{Y}$, или в развернутой форме

$$\left.\begin{aligned} 0{,}2x_1 - 0{,}7x_2 &= y_1 \\ -0{,}6x_1 + 0{,}1x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\}.$$

Сложив почленно эти два уравнения, придем к уравнению

$$-0{,}4x_1 - 0{,}6x_2 = y_1 + y_2,$$

которое не может удовлетворяться ни при каких неотрицательных значениях x_1 и x_2. Следовательно, матрица A не может служить структурной матрицей линейной балансовой модели *.

36. По заданной структурной матрице трехотраслевой модели

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

определить изменение валового выпуска для следующего изменения конечного продукта: $\Delta y_1 = 20$, $\Delta y_2 = 10$ и $\Delta y_3 = 50$.

---

* Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования неотрицательного решения балансовых уравнений (продуктивности матрицы A) является положительность определителя $D(E - A)$.

Вычислить соответствующие изменения затрат труда, если коэффициенты прямых затрат труда задаются строкой $\bar{a}_4 = (1{,}2;\ 1{,}0;\ 0{,}5)$.

37. Имеется трехотраслевая модель, характеризующаяся следующей структурной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}25 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае первая нулевая строка показывает, что продукция I отрасли идет только на образование конечного продукта.

При изготовлении продукции каждой из отрасли используются три вида сырья (а, б и в), нормативы затрат которого на 1 ед. продукции соответствующей отрасли определяются матрицей

$$C = \begin{array}{c} \\ \text{а} \\ \text{б} \\ \text{в} \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 3{,}0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Определить полные затраты сырья каждого вида на единицу конечного продукта и необходимое количество сырья для изготовления конечной продукции в количестве $y_1 = 10$, $y_2 = 15$ и $y_3 = 5$.

38. Решить ту же задачу для структурной матрицы из задачи 36.

39. По данным отчетного периода получен следующий баланс трехотраслевой экономической системы:

№ отраслей	Потребители			Конечная продукция (тыс. шт.)	Валовая продукция (тыс. шт.)
	1	2	3		
Производительность 1 . . .	20	40	30	110	200
Производительность 2 . . .	30	16	60	54	160
Производительность 3 . . .	10	24	16	150	200
Трудоемкость (в тыс. ч/тыс. шт.)	25	50	30		
Фондоемкость (в тыс. руб./тыс. шт.)	200	300	400		

Определить следующие экономические показатели на планируемый период:

1) коэффициенты прямых затрат;

2) коэффициенты полных затрат;

3) валовый выпуск отраслей, обеспечивающий новый конечный продукт $\bar{Y} = (130,\ 60,\ 160)$;

4) коэффициенты прямых (t_k) и полных (T_k) трудовых затрат и необходимый объем трудовых ресурсов Q_k;

5) коэффициенты прямой (f_k) и полной (F_k) фондоемкостей и суммарную потребность в фондах (Φ_k) каждой отрасли;

6) систему цен P_k, пропорциональных полным затратам общественного труда, исходя из денежного эквивалента единицы рабочего времени $P = 10$ тыс. руб./тыс. ч.

40. Дополнительно к данным предыдущей задачи известны размеры фондов по трем группам:

Группы фондов	Отрасли		
	1	2	3
Здания и сооружения	20	16	30
Производственное оборудование	120	160	160
Оборотные средства	60	124	210
Итого	200	300	400

Определить коэффициенты прямых и полных фондоемкостей по каждой группе фондов и суммарную потребность в фондах по каждой группе.

41. Двухотраслевая экономическая система характеризуется матрицей коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Рассчитать коэффициенты полных затрат непосредственным способом (путем последовательного приближения) и с помощью разложения обратной матрицы в ряд, сравнив эти два метода расчета с результатом вычисления обратной матрицы.

Решение. Пусть выпускается единица конечного продукта I отрасли. Для этого необходимо затратить 0,1 ед. продукции той же I отрасли и 0,2 ед. продукции II отрасли. Это будут коэффициенты прямых затрат. Но в свою очередь это потребует, согласно коэффициентам косвенных затрат, продукции I отрасли в количестве $0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2$ и II отрасли в количестве $0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2$. Это будут косвенные затраты первого порядка. Таким же путем получаем

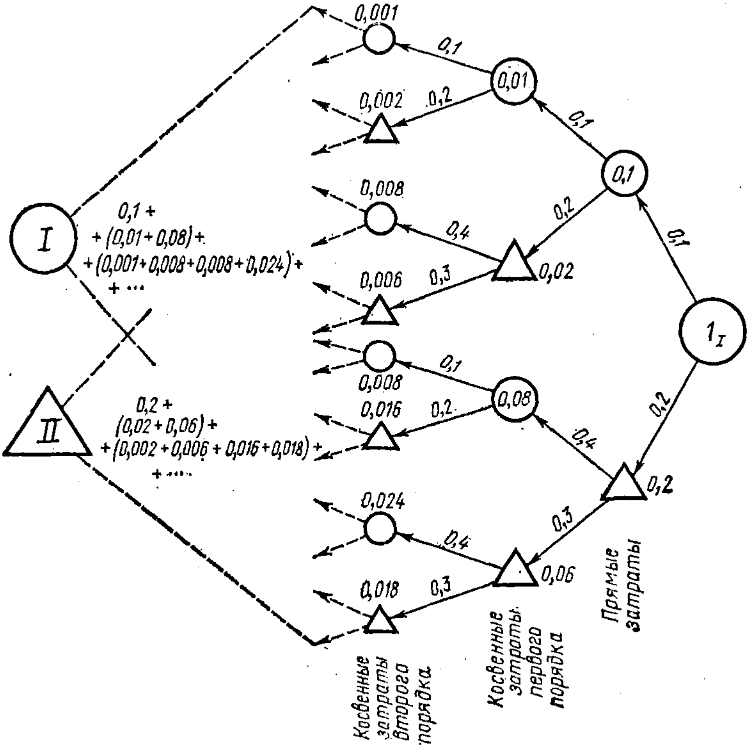

РИС. 2

косвенные затраты второго порядка в количестве $0{,}1\ (0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2) + 0{,}4\ (0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2)$ для I отрасли и $0{,}2\ (0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2) + 0{,}3\ (0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2)$ для II отрасли и. т. д.

Последовательный расчет этих затрат показан на рис. 2. Согласно рисунку, получаем $s_{11} = 1 + 0{,}1 + 0{,}09 + 0{,}041 + \ldots \approx 1{,}231$ и $s_{21} = 0{,}2 + 0{,}08 + 0{,}042 + \ldots \approx 0{,}322$.

Эти же последовательные слагаемые мы получим из разложения

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}16 \\ 0{,}08 & 0{,}17 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0{,}041 & 0{,}084 \\ 0{,}042 & 0{,}083 \end{pmatrix} + \ldots \approx \begin{pmatrix} 1{,}231 & 0{,}644 \\ 0{,}322 & 1{,}553 \end{pmatrix}.$$

Точное вычисление обратной матрицы дает

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1,273 & 0,726\\ 0,364 & 1,638\end{pmatrix}.$$

42. По данным задачи 41 вычислить с помощью прямого расчета и разложения в ряд косвенные затраты третьего порядка, а также затраты на единицу продукции II отрасли.

43. Трехотраслевая экономическая система характеризуется следующей треугольной матрицей коэффициентов полных затрат:

$$A=\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array}\begin{pmatrix}0,1 & 0,2 & 0,4\\ 0 & 0,2 & 0,3\\ 0 & 0 & 0,1\end{pmatrix}.$$

Показать, что в этом случае расчет коэффициентов полных затрат можно произвести арифметически; при этом получаются точно такие же результаты, как и при вычислении коэффициентов с помощью обратной матрицы.

ГЛАВА III

Теоретические основы методов линейного программирования

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНОЙ МОДЕЛИ

Модель задачи линейного программирования может быть задана в одной из следующих форм:

Каноническая	Стандартная	Общая
1) Ограничения		
Уравнения $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i0}$ $(i=1, \ldots, m)$	Неравенства $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \leqslant a_{i0}$ $(i=1, \ldots, m)$	Уравнения и неравенства $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \begin{Bmatrix} \leqslant \\ = \\ \geqslant \end{Bmatrix} a_{i0}$ $(i=1, \ldots, m)$
2) Условия неотрицательности		
Все переменные $x_k \geqslant 0 \ (k=1, \ldots, n)$	Все переменные $x_k \geqslant 0 \ (k=1, \ldots, n)$	Часть переменных $x_k \geqslant 0 \ (k=1, \ldots, s,$ $s \leqslant n)$
3) Цель задачи $\left(z = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right)$		
$\max z$	$\max z$ или $\min z$	$\max z$ или $\min z$

44. Привести к канонической форме следующую задачу линейного программирования:

найти минимум линейной функции

$$z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \qquad (1)$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{r}
2x_1-\ \ x_2+3x_3+\ \ x_4=4\\
x_1+2x_2+3x_3+2x_4=6\\
3x_1-\ \ x_2-2x_3+\ \ x_4\geqslant 2\\
5x_1+3x_2+\ \ x_3\qquad\ \ \leqslant 6\\
-2x_1+\ \ x_2-3x_3-2x_4\leqslant 4
\end{array}\right\}\qquad(2)$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.\qquad(3)$$

Решение. Каноническая форма задачи характеризуется следующими тремя признаками: 1) *однородная система ограничений в виде системы уравнений;* 2) *однородные условия неотрицательности, распространяющиеся на все переменные, участвующие в задаче,* и 3) *максимизация линейной функции.* В данной задаче нарушены все эти три признака.

Начнем с преобразования смешанной системы ограничений в систему уравнений. Это преобразование выполняется путем введения неотрицательных «балансовых» переменных (x_5, x_6, x_7) в левые части неравенств со знаками «плюс» или «минус» в зависимости от знака неравенства. В результате система условий (2) и (3) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{lllr}
2x_1-\ \ x_2+3x_3+\ \ x_4 & & & =4\\
x_1+2x_2+3x_3+2x_4 & & & =6\\
3x_1-\ \ x_2-2x_3+\ \ x_4-x_5 & & & =2\\
5x_1+3x_2+\ \ x_3 & +x_6 & & =6\\
-2x_1+\ \ x_2-3x_3-2x_4 & & +x_7 & =4
\end{array}\right\}\qquad(2')$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_5\geqslant 0,\quad x_6\geqslant 0,\quad x_7\geqslant 0.\qquad(3')$$

Перейдем к преобразованию условий неотрицательности. Неравенствами (3′) не охвачены только две переменные x_3 и x_4, которые будем называть «произвольными». Для приведения задачи к однородным условиям неотрицательности можно воспользоваться двумя приемами.

Первый прием технически выполняется без всяких дополнительных вычислений, но зато приводит к увеличению числа переменных в задаче и поэтому к более сложным вычислениям в дальнейшем. Суть его заключается в том, что вместо каждой произвольной переменной (x_3 и x_4) вводятся две неотрицательные переменные из равенств

$$x_3=x_3'-x_3''\quad\text{и}\quad x_4=x_4'-x_4'',$$

где $x_3'\geqslant 0$, $x_3''\geqslant 0$, $x_4'\geqslant 0$, $x_4''\geqslant 0$. В результате получим задачу, содержащую не 7, а 9 переменных.

Второй прием, более сложный на начальном этапе, наоборот упрощает дальнейшие расчеты, так как он связан с уменьшением как числа переменных, так и числа уравнений. Сущность его заключается в следующем. Найдем из каких-либо двух уравнений системы (2′) «произвольные» переменные x_3 и x_4, выразив их через остальные переменные, и исключим с помощью найденных выражений эти переменные из остальных уравнений системы и из данной линейной функции (1).

Практически это можно сделать с помощью все тех же таблиц Гаусса, если в них соответственно выбрать в качестве разрешающих столбцы при переменных x_3 и x_4.

№ итерации	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
Исходная система	0	2	—1	3	1	0	0	0	4	9
	0	1	2	3	2	0	0	0	6	14
	0	3	—1	—2	1	—1	0	0	2	2
	0	5	3	$\boxed{1}$	0	0	1	0	6	16
	0	—2	1	—3	—2	0	0	1	4	—1
	1	2	1	—3	2	0	0	0	0	3
I	0	—13	—10	0	$\boxed{1}$	0	—3	0	—14	—39
	0	—14	—7	0	2	0	—3	0	—12	—34
	0	13	5	0	1	—1	2	0	14	34
	0	5	3	1	0	0	1	0	6	16
	0	13	10	0	—2	0	3	1	22	47
	1	17	10	0	2	0	3	0	18	51
II	0	—13	—10	0	1	0	—3	0	—14	—39
	0	12	13	0	0	0	3	0	16	44
	0	26	15	0	0	—1	5	0	28	73
	0	5	3	1	0	0	1	0	6	16
	0	—13	—10	0	0	0	—3	1	—6	—31
	1	43	30	0	0	0	9	0	46	129

В таблицу внесена, кроме коэффициентов и свободных членов всех пяти уравнений, еще строка, соответствующая линейной функции (1), рассматриваемой как 6-е уравнение, $z + 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$, разрешенное относительно базисной переменной z. Таким образом, можно одновременно вести исключение x_3 и x_4 из уравнений системы и из линейной функции z. После II итерации получили два уравнения (4-е и 1-е), разрешенные относительно произвольных переменных x_3 и x_4:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 6 - 5x_1 - 3x_2 - x_6 \\ x_4 &= -14 + 13x_1 + 10x_2 + 3x_6 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

а остальные уравнения и функция z не зависят от этих переменных:

$$\left.\begin{aligned} 12x_1 + 13x_2 + 3x_5 &= 16 \\ 26x_1 + 15x_2 - x_5 + 5x_6 &= 28 \\ -13x_1 - 10x_2 - 3x_6 + x_7 &= -6 \end{aligned}\right\}, \tag{2''}$$

$$z = -43x_1 - 30x_2 - 9x_6 + 46. \tag{1'}$$

Все переменные, входящие в выражения (2″) и (1′), подчинены условиям неотрицательности:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0, \quad x_6 \geqslant 0, \quad x_7 \geqslant 0. \qquad (3'')$$

В результате пришли к следующей задаче линейного программирования с ограничениями в виде системы уравнений и однородными условиями неотрицательности:

минимизировать линейную функцию (1′) при условиях (2″) и (3″).

Наконец, переход к задаче максимизации линейной функции осуществляется путем введения новой функции z_1 из равенства

$$z_1 = -z = 43x_1 + 30x_2 + 9x_6 - 46. \qquad (1'')$$

В результате задача оказалась проще, чем та, которая задана условиями (1), (2) и (3), так как она содержит только три уравнения и всего пять переменных.

После решения этой задачи, т. е. после отыскания значений x_1^*, x_2^*, x_5^*, x_6^* и x_7^*, удовлетворяющих условиям (2″) и (3″) и максимизирующих функцию z_1, необходимо по соотношениям (4) определить значения x_3^* и x_4^* и таким образом найти оптимальное решение исходной задачи $X_{\text{опт}} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*)$. При этом значения балансовых переменных x_5^*, x_6^* и x_7^* показывают, насколько при данном оптимальном решении (на пределе или с запасом) выполняется соответствующее исходное неравенство.

В заключение заметим, что примененный выше прием последовательного исключения x_3 и x_4 из всех условий задачи с помощью равенств (4) был возможен только потому, что эти переменные не были связаны условиями неотрицательности.

Действительно, если бы x_3 и x_4 были связаны неравенствами $x_3 \geqslant 0$ и $x_4 \geqslant 0$, то нам пришлось бы после их исключения из всех остальных условий задачи добавить к неравенствам (3) еще два ограничения, вытекающие из равенства (4):

$$\left.\begin{aligned} 6 - 5x_1 - 3x_2 - x_6 &\geqslant 0 \\ -14 + 13x_1 + 10x_2 + 3x_6 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\},$$

которые, после введения балансовых переменных привели бы нас окончательно к исходной модели задачи.

45. Привести следующую каноническую форму задачи линейного программирования к задаче с однородными ограничениями в виде системы неравенств: максимизировать

$$z = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 \qquad &= 4 \end{aligned}\right\}, \quad x_i \geqslant 0 \text{ для } i = 1, \ldots, 5.$$

Решение. Прежде всего приведем систему ограничений задачи к единичному базису. При этом будем одновременно проводить преобразования и над выражением для линейной функции, рассматриваемым как уравнение

$$z-2x_1+x_2-3x_4-2x_5=4,$$

разрешенное относительно базисной переменной z. Выполняя преобразования метода последовательных исключений, не следует выбирать в качестве разрешающей строку, соответствующую последнему уравнению. Таким образом, оно все время будет оставаться разрешенным относительно базисной переменной z.

№ итерации	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
	0	$\boxed{1}$	0	−2	2	−3	2	2
	0	2	1	4	0	1	6	15
	0	−1	2	0	3	0	4	8
	1	−2	1	0	−3	−2	4	−1
I	0	1	0	−2	2	−3	2	0
	0	0	$\boxed{1}$	8	−4	7	2	14
	0	0	2	−2	5	−3	6	8
	1	0	1	−4	1	−8	8	−1
II	0	1	0	−2	2	−3	2	0
	0	0	1	8	−4	7	2	14
	0	0	0	$\boxed{-18}$	13	17	2	−20
	1	0	0	−12	5	−15	6	−15
III	0	1	0	0	5/9	−10/9	16/9	10/3
	0	0	1	0	16/9	−5/9	26/9	46/9
	0	0	0	1	−13/18	17/18	−1/9	10/9
	1	0	0	0	−11/3	−11/3	14/3	−5/3

После III итерации система уравнений оказалась разрешенной относительно переменных x_1, x_2 и x_3. Одновременно эти переменные исключены из линейной функции z. Теперь, используя условия неотрицательности указанных переменных, можно каждое из полученных уравнений заменить соответствующим ему неравенством. Так, вместо 1-го уравнения

$$x_1+5/9\ x_4-10/9\ x_5=16/9$$

после отбрасывания неотрицательной переменной $x_1 \geqslant 0$ получим неравенство $5/9\ x_4-10/9\ x_5 \leqslant 16/9$. Аналогично преобразуются и все остальные уравнения. В результате приходим к искомой форме задачи линейного программирования: найти максимум

$$z=11/3\ x_4+11/3\ x_5+14/3$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} 5x_4-10x_5&\leqslant 16\\ 16x_4-\ 5x_5&\leqslant 26\\ -13x_4+17x_5&\leqslant -2 \end{aligned}\right\},\quad x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0.$$

В данной модели фигурируют только две переменные x_4 и x_5, которые после приведения исходной системы к единичному базису оказались в ней свободными. Следовательно, решив задачу в последней ее формулировке и найдя оптимальные значения x_4^* и x_5^*, мы этим самым однозначно определим значения остальных переменных (x_1^*, x_2^*, x_3^*), т. е. найдем оптимальное решение задачи $X_{\text{опт}} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$. В этом смысле и говорят, что последняя модель эквивалентна исходной. Заметим, что до приведения к единичному базису нельзя было провести аналогичные преобразования системы, так как, отбрасывая, например, в исходной системе переменную x_1, мы по-разному меняем левые части 1, 2 и 3-го уравнений (1-е уменьшаем на x, 2-е — на $2x_1$ и 3-е увеличиваем на x_1), что не могло быть отражено в соответствующих неравенствах.

Примечание. Изложенный способ перехода от ограничений в форме уравнений к эквивалентной системе неравенств оказывается рациональным, так как уменьшает число переменных («размерность») задачи. Однако он требует дополнительных расчетов, связанных с приведением системы уравнений к единичному базису. Существует и другой способ, не требующий дополнительных расчетов, хотя и сохраняющий размерность задачи, но увеличивающий число ограничений. Он основан на том, что всякое уравнение вида $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kx_k=b$ равносильно двум неравенствам $\sum a_kx_k\leqslant b$ и $\sum a_kx_k\geqslant b$.

46. Следующие системы ограничений привести к эквивалентной системе уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1-x_2\qquad\quad -3x_4+\ x_5&=5\\ x_1+2x_2-\ x_3\qquad\quad -3x_5&\leqslant 4\\ 3x_2+2x_3+\ x_4\qquad\ &\geqslant 2 \end{aligned}\right\};$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} x_1+3x_2-\ x_3+\qquad\quad x_5&\geqslant 3\\ -2x_1\qquad +3x_3+\ x_4-2x_5&\leqslant 1\\ 3x_1-4x_2+\ x_3+2x_4+3x_5&=5 \end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3\qquad\quad +x_5&=5\\ 2x_1+\ x_2-\ x_3+4x_4\qquad &\leqslant 6\\ 3x_2+2x_3+\ x_4+x_5&\geqslant 8 \end{aligned}\right\};$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} -4x_1+3x_2-2x_3+\ x_4\qquad &\leqslant 8\\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4\qquad &\geqslant 1\\ 3x_1+\ x_2-2x_3\qquad\quad +x_5&=3 \end{aligned}\right\}.$$

47. Привести к канонической форме следующие задачи линейного программирования:

1) $z = x_1 - x_2 + 3x_3$ (min),

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 \geqslant 1 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0;$$

2) $z = 2x_1 + x_2 - x_3$ (max),

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leqslant 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0;$$

3) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5$ (min),

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 \leqslant 4 \end{array}\right\},$$

$$x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0;$$

4) $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5$ (max),

$$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geqslant 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0.$$

48. Привести к системе неравенств следующие ограничительные условия:

1) $$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0;$$

2) $$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0.$$

49. Привести к стандартной модели следующие задачи линейного программирования:

1) $z = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$ (max),

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_4 \geqslant 0;$$

2) $z=x_1-x_2+3x_4+x_5$ (min),

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1-x_2-3x_3+x_4-x_5=4 \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5=15 \\ 2x_1-2x_2-x_3+2x_5=8 \end{array}\right\},$$

$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0;$

3) $z=x_1-2x_2+2x_3+x_4+2x_5$ (max),

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=-2 \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+x_4-x_5=6 \end{array}\right\},$$

$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0;$

4) $z=3x_1+x_2+x_4-x_5$ (min),

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1-x_2+x_4-x_5=9 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_5=4 \\ x_1-x_2-x_3-x_5=6 \end{array}\right\},$$

$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0.$

50. Задачи 49 (1—4) привести к стандартной модели, используя второй способ преобразования.

§ 2 ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

51. Построить область решений системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} -x_1+2x_2\leqslant 6 \\ 9x_1+4x_2\leqslant 56 \\ 3x_1+5x_2\geqslant 4 \end{array}\right\}.$$

Решение. Областью решения линейного неравенства с двумя переменными является полуплоскость, лежащая по одну сторону от граничной прямой; уравнение этой прямой получается, если заменить знак неравенства на знак равенства. Таким образом, для данной системы неравенств получим уравнения трех граничных прямых (1), (2) и (3) (рис. 3). Для того чтобы определить расположение соответствующей полуплоскости относительно граничной прямой, подставляем координаты какой-либо точки (в качестве ее проще всего взять начало координат) в левую часть неравенства. Так, например, при подстановке значений $x_1=0$ и $x_2=0$ в первое неравенство получаем $0\leqslant 6$; следовательно, область решений этого неравенства включает начало координат. Аналогично обстоит дело и со вторым неравенством. Третьему же неравенству координаты начала не удовлетворяют ($0 < 4$), следовательно, соответствующая полуплоскость располагается по отношению к граничной прямой (3) по другую сторону, нежели начало координат. Расположение указанных полуплоскостей показано на рис. 3 штрихами. Очевидно, областью решения системы трех неравенств служит треугольник, ограниченный данными тремя граничными прямыми, с вершинами, являющимися точками пересечения этих прямых. Для нахождения их координат нужно решить совместно соответствующие пары уравнений. В результате найдем три вершины: F (—2; 2); C (4; 5) и Q (8; —4).

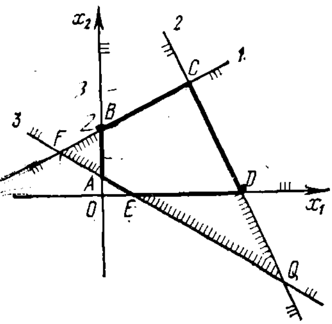

РИС. 3

Замечание. Если граничная прямая проходит через начало координат, то вместо точки O (0; 0) необходимо испытать какую-либо другую точку.

52. Построить область допустимых решений системы неравенств, указанных в задаче 51.

Решение. *Допустимыми* называются решения, в которых значения всех переменных не отрицательны, иными словами, которые кроме указанных неравенств, удовлетворяют дополнительно условиям $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$.

Для определения области допустимых решений необходимо, кроме упомянутых выше трех граничных прямых, учесть еще две граничные прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Соответствующие им полуплоскости лежат справа от оси ординат и над осью абсцисс. Иными словами, из предыдущей области (треугольника) выделяется ее часть, расположенная в I квадранте (рис. 3). Ее полностью определяют пять вершин: A (0; 4/5), B (0; 3), C (4; 5), D (56/9; 0), E (4,3; 0).

53. Построить область допустимых решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{rl}
-2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6= & 9\\
-3x_1+x_3+x_5= & 3\\
3x_1+2x_4-3x_5-x_6= & 5\\
x_1+x_2+3x_5-2x_6= & -1
\end{array}\right\},$$

где $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_6 \geqslant 0.$

Решение. В данной системе 6 переменных. Поэтому, очевидно, речь может идти о построении области допустимых значений свободных переменных (которых здесь оказывается две), определяющих допустимые (т. е. неотрицательные) решения системы. Поэтому начинаем прежде всего с приведения системы к единичному базису. После трех итераций метода последовательного исключения получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & \underline{x_4} & - & 2x_5 & & = 4\\ -3x_1 & + & \underline{x_3} & & & + & x_5 & & = 3\\ -\ x_1 & & & & & - & x_5 & + \underline{x_6} & = 3\\ -\ x_1 & + & \underline{x_2} & & & + & x_5 & & = 5 \end{array}\right\},$$

разрешенную относительно неотрицательных базисных переменных x_4, x_3, x_6, x_2. Отбрасывая их, придем к эквивалентной системе неравенств относительно двух свободных переменных x_1 и x_5:

$$x_1 - 2x_5 \leqslant 4, \quad -x_1 - x_5 \leqslant 3,$$
$$-3x_1 + x_5 \leqslant 3, \quad -x_1 + x_5 \leqslant 5,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0.$$

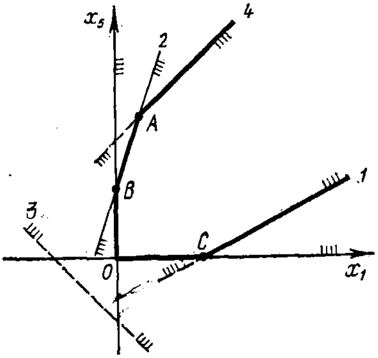

Рис. 4

Область допустимых решений этой системы неравенств, построенная в плоскости x_1Ox_5 (рис. 4), служит одновременно областью допустимых значений свободных переменных исходной системы уравнений.

Так как любая пара свободных переменных однозначно определяет решение системы, то построенную область называют также *областью допустимых решений системы уравнений*. Построенная на рис. 4 область с вершинами A (1; 6), B (0; 3), O (0; 0) и C (4; 0) оказалась неограниченной.

54. Построить области решений следующих систем неравенств:

$$1)\ \left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leqslant 2\\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10\\ 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 10 \end{aligned}\right\}; \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leqslant 4\\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10\\ 4x_1 - 3x_2 &\leqslant 12\\ 7x_1 + 4x_2 &\leqslant 28 \end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geqslant -1\\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10\\ 4x_1 - 3x_2 &\leqslant 12 \end{aligned}\right\}.$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

55. Построить области допустимых решений следующих систем уравнений (все $x_i \geqslant 0$):

$$1)\ \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 20\\ x_1 + x_3 + 3x_4 &= 8\\ x_1 + x_5 &= 2 \end{aligned}\right\};$$

$$2)\ \left.\begin{array}{r} 2x_1-3x_2+\ x_3-2x_4=\ \ 2 \\ x_1+\ x_2-2x_3-3x_4=-3 \end{array}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{array}{r} x_1\quad -2x_3+x_4=4 \\ x_2+\ x_3+x_4=5 \end{array}\right\};\quad 4)\ \left.\begin{array}{r} x_1\quad +\ x_3=8 \\ x_2+2x_3=4 \end{array}\right\}.$$

56. Построить области допустимых решений следующих смешанных систем:

$$1)\ \left.\begin{array}{r} x_1-\ x_2\geqslant-\ 3 \\ 6x_1+7x_2\leqslant\ \ 42 \\ 2x_1-3x_2\leqslant\ \ \ 6 \\ x_1+\ x_2=\ \ \ 4 \end{array}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{array}{r} -x_1+2x_2\leqslant\ 4 \\ 2x_1-\ x_2\leqslant\ 6 \\ 3x_1+8x_2=24 \end{array}\right\},$$

$$x_2\geqslant0;\qquad x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0;$$

$$3)\ \left.\begin{array}{r} 2x_1-\ x_2+x_3=6 \\ x_1-2x_2+x_3=3 \\ x_1+\ x_2\qquad\leqslant8 \end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0,\ x_3\geqslant0.$$

57. Записать систему неравенств по области ее допустимых решений, изображенной на рис. 5.

Решение. Задача является в какой-то мере обратной предыдущим. Запишем сначала уравнения граничных прямых, как прямых, проходящих через две точки.

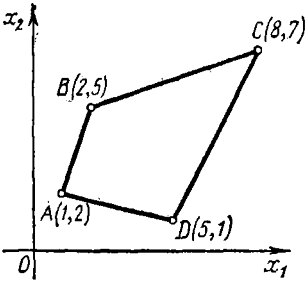

Рис. 5

Так, например, для прямой AB получим $\frac{x_2-2}{5-2}=\frac{x_1-1}{2-1}$, или, после упрощений, $3x_1-x_2=1$. Аналогично получим уравнения остальных прямых. Полуплоскость, определяемая граничной прямой AB, должна включать весь четырехугольник $ABCD$, следовательно, и точки C и D. Подставив в уравнение прямой AB координаты одной из них, например C, получим $3\cdot8-7=17>1$. Следовательно, неравенство, которое определяет полуплоскость, включающую точку C, имеет вид $3x_1-x_2\geqslant1$.

Аналогичным образом найдем остальные три неравенства. Окончательно получим следующую систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1-\ x_2\geqslant\ \ 1 \\ -x_1+3x_2\leqslant13 \\ 2x_1-\ x_2\leqslant\ \ 9 \\ x_1+4x_2\geqslant\ \ 9 \end{array}\right\}.$$

58. Записать с помощью неравенств области, представляющие собой в плоскости x_1Ox_2 многоугольники со следующими вершинами: 1) A (1; 8), B (5; 2), C (6; 6); 2) A (1; 4), B (4; 1), C (8; 2), D (6; 9), E (1; 8); 3) A (2; 6), B (6; 9), C (9; 3), D (5; —3); 4) A (0; 4), B (4; 4), C (3; 0), D (1; 0), E (0; 2).

59. Решить графически следующую задачу линейного программирования:

$$z = 4x_1 + 2x_2 \text{ (max)}$$

при условиях

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 18, \quad -x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \quad 2x_1 - x_2 \leqslant 10,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Прежде всего построим область допустимых решений системы неравенств так, как это было сделано в задаче 51. В данном случае получаем выпуклый пятиугольник (рис. 6).

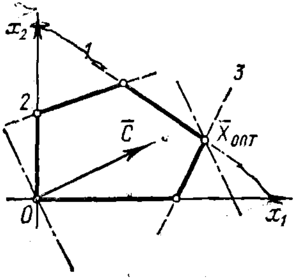

Рис. 6

Далее в той же системе координат построим вектор $\bar{C} = (4, 2)$, нормальный к линиям уровня $4x_1 + 2x_2 = z$.

Прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно вектору $\bar{C}$, представляет собой линию уровня, соответствующую значению $z = 0$. Перемещая эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{C}$ до тех пор, пока она будет сохранять общие точки с областью допустимых решений, найдем, что в крайнем возможном положении линия уровня пройдет через точку $\bar{X}_{опт}$. Этому положению линии уровня и соответствует $z = z_{max}$. Для нахождения координат точки $\bar{X}_{опт}$ необходимо совместно решить систему уравнений граничных прямых

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 18 \\ 2x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

В результате получим искомое оптимальное решение

$$\bar{X}_{опт} = (6, 2).$$

Подставляя значения $x_1^* = 6$ и $x_2^* = 2$ в функцию z, найдем $z_{max} = 28$.

60. Решить графически следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \text{ (max)}$$

при условиях

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 11, \quad -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \quad x_1 - 3x_2 \leqslant 0,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Первый этап — построение области допустимых решений — выполняется как и в предыдущей задаче. В результате получаем неограниченную многоугольную область, показанную на рис. 7. На втором этапе решения при параллельном перемещении линии уровня устанавливаем, что такое перемещение можно производить неограниченно. Следовательно, функция z неограничена сверху, т. е. $z_{\max} \to \infty$. В таком случае говорят, что задача линейного программирования не имеет решения из-за неограниченности целевой функции.

Заметим, что если при тех же исходных данных задачи требовалось бы функцию z минимизировать, то получили бы оптимальное решение задачи в точке D (3; 1).

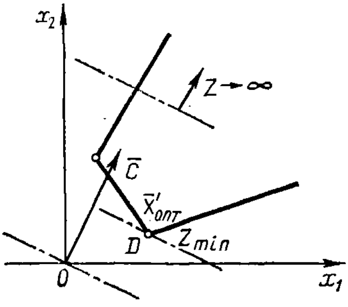

РИС. 7

61. Решить графически задачу линейного программирования, заданную в канонической форме:

$$z = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \quad (\max)$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 &= 87 \\ 5x_1 + x_2 + x_5 &= 49 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_7 &= 19 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_7 \geqslant 0.$$

Решение. В отличие от предыдущих задач система ограничений задана не в форме неравенств, а в виде системы пяти уравнений. Поэтому нужно прежде всего перейти от канонической к стандартной модели. Такое преобразование уже выполнялось в задаче 45. Отбрасывая в уравнениях базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7, перейдем таким путем к системе пяти неравенств, которым должны удовлетворять свободные переменные исходной задачи (x_1 и x_2). Воспользовавшись теми же пятью равенствами, исключим базисные переменные также из выражения для функции z. В результате этих несложных преобразований придем к следующей задаче, содержащей только две переменные x_1 и x_2:

$$z = 3x_1 + 4x_2 \ (\max),$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 5x_2 &\leq 37 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 49 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 19 \end{aligned}\right\}.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

На рис. 8 показано графическое решение этой задачи. Оптимальное решение совпадает с точкой $\bar{X}_{\text{опт}}$, лежащей на пересечении прямых $B\bar{X}_{\text{опт}}$ и $D\bar{X}_{\text{опт}}$. Вдоль каждой граничной прямой соответствующее неравенство обращается в равенство, поэтому отброшенная при образовании этого неравенства базисная переменная равна нулю. Таким образом, в каждой из вершин области по крайней мере две переменные исходной задачи принимают нулевые значения. Так, в точке $\bar{X}_{\text{опт}}$ имеем $x_4^* = 0$ и $x_5^* = 0$. Подставляя эти значения во 2-е и 3-е исходные уравнения и решая совместно полученную систему двух уравнений (уравнений граничных прямых $B\bar{X}_{\text{опт}}$ и $D\bar{X}_{\text{опт}}$), получим $x_1^* = 8$ и $x_2^* = 9$.

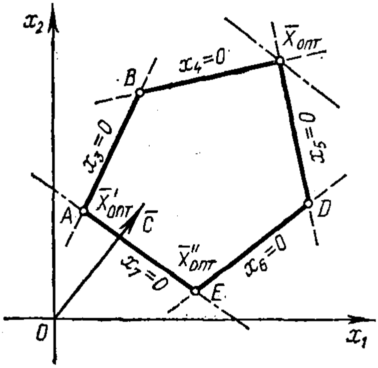

РИС. 8

Наконец, подставляя найденные значения x_1^* и x_2^* в 1, 4 и 5-е исходные уравнения, определим значения остальных трех переменных задачи: $x_3^* = 9$, $x_6^* = 23$ и $x_7^* = 41$. Таким образом, оптимальное решение задачи

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (8,\ 9,\ 9,\ 0,\ 23,\ 41).$$

Соответствующее значение функции z есть $z_{\max} = 60$.

62. В условиях задачи 61 найти минимум z.

Решение. Очевидно, что весь ход рассуждений, приведший к рис. 8, сохранится. При параллельном перемещении линии уровня в направлении, противоположном вектору $\bar{C}$, придем к выводу, что в крайнем положении (при котором $z = z_{\min}$) она проходит через сторону многоугольника AE. Поэтому в отличие от рассмотренной выше задачи, здесь оптимальное решение будет достигаться в любой точке отрезка AE, в том числе и в его крайних точках A и E.

Такой случай получил название *альтернативного оптимума*. Так как весь отрезок однозначно определяется заданием своих крайних точек, то для полного описания всего множества оптимальных решений достаточно определить решения $\bar{X}'$ и $\bar{X}''$, соответствующие вершинам A и E. Для решения $\bar{X}'$ имеем $x_3^* = 0$ и $x_7^* = 0$ (см. рис. 8). Решая совместно 1-е и 5-е уравнения, найдем $x_1^* = 1$ и $x_2^* = 4$. Наконец, из 2, 3 и 4-го уравнений находим: $x_4^* = 18$, $x_5^* = 40$ и $x_6^* = 24$. Аналогично определяется второе оптимальное решение, соответствующее точке E: $\bar{X}'' = (5,\ 1,\ 11,\ 37,\ 23,\ 0,\ 0)$.

Пользуясь уравнением отрезка, соединяющего точки $\bar{X}'$ и $\bar{X}''$, в виде $\bar{X} = t\bar{X}' + (1 - t)\bar{X}''$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, и подставив в это уравнение найденные два оптимальные решения, получим формулу для определения любого оптимального решения задачи (общее решение)

$$\bar{X} = t\,(1,\ 4,\ 0,\ 18,\ 40,\ 24,\ 0) + (1 - t)\,(5,\ 1,\ 11,\ 37,\ 23,\ 0,\ 0)$$

или после выполнения указанных действий над векторами

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (5 - 4t,\ 1 + 3t,\ 11 - 11t,\ 37 - 19t,\ 23 + 17t,\ 24t,\ 0),$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Придавая параметру t любые числовые значения от 0 до 1, будем получать различные оптимальные решения задачи, при любом из которых

$$z = z_{\min} = 19.$$

Общие указания к графическому решению задач линейного программирования

а) Графически могут решаться: 1) задачи, заданные в стандартной форме, содержащие не более двух переменных; 2) задачи, заданные в канонической форме с числом свободных переменных $n - r \leqslant 2$; 3) задачи общего вида, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более двух свободных переменных.

б) Основной формой для графического решения является 1-й тип задач. Поэтому, если встречается 2-й или 3-й тип задач, то предварительно их модель должна быть приведена к 1-му типу.

в) Решение задачи 1-го типа выполняется в два этапа: построение области допустимых решений и нахождение в этой области оптимального решения.

г) При построении области допустимых решений может встретиться один из следующих трех случаев: I — пустая область, II — выпуклый многоугольник и III — неограниченная выпуклая многоугольная область.

В I случае задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений в области допустимых решений; во II случае задача всегда имеет оптимальное решение; в III случае, в зависимости от направления вектора $\bar{C}$ (от коэффициентов функции z), задача может иметь или не иметь решения. Последнее связано с неограниченным возрастанием ($z_{\max} \to \infty$) или убыванием ($z_{\min} \to \infty$) функции z в области допустимых решений.

д) Задача может иметь единственное оптимальное решение, совпадающее с одной из вершин области, и бесчисленное множество решений (альтернативный оптимум).

е) В случае альтернативного оптимума и ограниченной области оптимальные решения соответствуют всем точкам отрезка, соединяющего две вершины области. В таком случае следует найти общее оптимальное решение, как это было сделано в конце задачи 62. В случае неограниченной области может оказаться, что среди множества оптимальных решений только одно совпадает с вершиной области (точка $\bar X'_{\text{опт}}$ на рис. 9). Тогда на «оптимальной» граничной прямой находят еще одно оптимальное решение $\bar X''_{\text{опт}}$ и далее общее оптимальное решение представляют формулой, аналогичной формуле отрезка, но с параметром t, меняющимся от 0 до ∞:

$$\bar X_{\text{опт}}=(1-t)\,\bar X'_{\text{опт}}+t\bar X''_{\text{опт}},$$

где $0\leqslant t\leqslant\infty$.

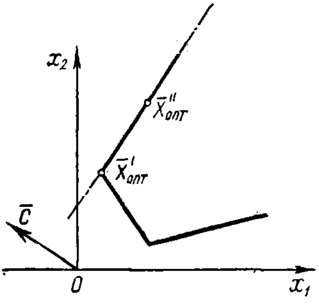

РИС. 9

63. Решить графически следующие задачи линейного программирования:

$$1)\ z=x_1-2x_2\ (\min),\quad \left.\begin{array}{r} x_1-x_2\leqslant 1\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1-2x_2\leqslant 0\end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

$$2)\ z=5x_1+3x_2\ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} 3x_1+5x_2\leqslant 15\\ 5x_1+2x_2\leqslant 10\end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

$$3)\ z=x_1+3x_2\ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} x_1-x_2\leqslant 1\\ 2x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1-x_2\geqslant 0\end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0;\ x_2\geqslant 0;$$

$$4)\ z=2x_1+3x_2\ (\max)\quad \left.\begin{array}{r} 3x_1+2x_2\leqslant 6\\ x_1+x_2\geqslant 1\end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

$$5)\ z=2x_1+3x_2\,(\min),\quad \left.\begin{array}{r} 3x_1+2x_2\geqslant 6\\ x_1+4x_2\geqslant 4\end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

$$6)\ z=x_1+x_2\ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2\leqslant 10\\ x_1+2x_2\geqslant 2\\ 2x_1+x_2\leqslant 10\end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

$$7)\ z=4x_1-2x_2+x_3-x_4\ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} x_1-x_2+4x_3-2x_4=2\\ 3x_1+2x_2-x_3+4x_4=3\end{array}\right\},\quad x_i\geqslant 0\ (i=1,\ \ldots,\ 4);$$

8) $z=x_1+2x_2+x_3-x_4-6$ (min),

$$\left.\begin{array}{l}-x_1+5x_2+x_3+x_4+x_5=10\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=6\\ 10x_2+x_3+2x_4+3x_5=25\end{array}\right\},$$

$$x_i\geqslant 0\ (i=1,\ \ldots,\ 5);$$

9) $z=-4x_1+3x_2+x_4-x_5$ (max),

$$\left.\begin{array}{l}2x_1-x_2-x_3=-1\\ x_1-3x_2-x_4=-13\\ 4x_1+x_2+x_5=26\\ x_1-3x_2+x_6=0\end{array}\right\},$$

$$x_i\geqslant 0\ (i=1,\ \ldots,\ 6);$$

10) $z=-3x_1+2x_2-3x_4-x_5$ (max),

$$\left.\begin{array}{l}3x_1-2x_2-x_3+x_4=2\\ 4x_1-x_2+x_4+x_5=21\\ 4x_1-x_2-x_4+x_5=13\\ x_1+x_2-x_6=3\end{array}\right\},$$

$$x_i\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6);$$

11) $z=x_1-x_2$ (max),

$$\left.\begin{array}{l}4x_1-3x_2-x_3+x_4+x_5=6\\ x_1+4x_2+x_3+x_5=15\\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=-3\end{array}\right\},$$

$$x_i\geqslant 0\ (i=1,\ \ldots,\ 5);$$

12) $z=x_1+3x_2$ (max),

$$\left.\begin{array}{l}2x_1-x_2+x_5+x_6=10\\ 2x_1+2x_2+x_4+x_6=25\\ 2x_1-3x_2-x_3+x_5=-9\\ 6x_2+x_3+x_4=36\end{array}\right\},$$

$$x_i\geqslant 0\ (i=1,\ \ldots,\ 6).$$

64. В следующих задачах целевая функция содержит параметр λ. Определить промежутки значений λ, при которых оптимальное решение будет совпадать с одной и той же угловой точкой области допустимых решений. В каких промежутках задача не имеет решения? При каких значениях λ будет бесчисленное множество решений?

$$1)\ z=2x_1+\lambda x_2\ (\max),$$

$$\left.\begin{aligned}-x_1+\ x_2&\leqslant 3\\ x_1+2x_2&\leqslant 12\\ 3x_1-\ x_2&\leqslant 15\end{aligned}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

$$2)\ z=2x_1+x_2+\lambda x_3\ (\max),$$

$$\left.\begin{aligned}-x_1+2x_2+x_3\qquad\quad &=3\\ 3x_1+2x_2\qquad +x_4\quad &=27\\ x_1-x_2\qquad\qquad +x_5&=4\end{aligned}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0;$$

$$3)\ z=-x_1+\lambda x_2\ (\max),$$

$$\left.\begin{aligned}-x_1+\ x_2&\leqslant 2\\ x_1-2x_2&\leqslant 3\end{aligned}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$$

65. Привести графическую интерпретацию и составить на основании чертежей стандартную модель задач, обладающих следующими свойствами:

1) имеется единственное оптимальное решение для $z_{\max}$ и $z_{\min}$;

2) $z_{\max}$ достигается в бесчисленном множестве точек, $z_{\min}$ — в единственной точке;

3) $z_{\max}\to\infty$, $z_{\min}$ достигается в единственной точке;

4) $z_{\max}\to\infty$ и $z_{\min}\to-\infty$;

5) решения нет из-за пустой области допустимых решений;

6) $z_{\min}$ достигается в бесчисленном множестве точек, из которых только одна соответствует опорному решению.

Указание. Во всех задачах 1—6 необходимо предусмотреть не менее трех ограничений.

66. В следующих задачах ограничения включают параметр λ. Определить, при каких значениях этого параметра задачи будут разрешимыми и неразрешимыми.

1) $z=2x_1+x_2$ (max),
$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2&\leqslant 4\\ x_1-\ x_2&\leqslant 6\\ \lambda x_1+\ x_2&\leqslant 3\end{aligned}\right\},$$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$

2) $z=x_1+2x_2$ (max),
$$\left.\begin{aligned} 2x_1+\ x_2&\geqslant\ \ 9\\ x_1-3x_2&\leqslant\ \ 1\\ \lambda x_1-\ x_2&\leqslant -2\end{aligned}\right\},$$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$

3) $z=x_1+2x_2-3x_3$ (min),
$$\left.\begin{aligned} x_1+\ x_2-x_3&=1\\ 2x_1+\lambda x_3+x_3&=2\end{aligned}\right\},$$
$x_3\geqslant 0.$

§ 3. ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

67. Определить и изобразить графически области, заданные следующими условиями:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2&\leqslant 1\\ (x_1-1)^2+x_2^2&\leqslant 1\end{aligned}\right\};\quad 2)\ \left.\begin{aligned} x_1^2+3x_2^2&\leqslant 6\\ x_1\geqslant 0,\ x_2&\geqslant 0\end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1x_2\quad&\geqslant 1\\ x_1^2+x_2^2&\leqslant 16\end{aligned}\right\};\quad 4)\ \left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2&\leqslant 16\\ x_1^2+x_2^2&\geqslant 1\end{aligned}\right\}.$$

68. Определить, являются ли ограниченными области решений следующих систем неравенств, и установить характер ограниченности:

$$1)\ \left.\begin{aligned} -3x_1+5x_2&\leqslant 10\\ 5x_1+2x_2&\leqslant 35\end{aligned}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{aligned} -x_1+x_2&\leqslant 2\\ 5x_1-x_2&\leqslant 10\end{aligned}\right\};$$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 3x_1-\ x_2&\leqslant 4\\ -x_1+3x_2&\geqslant 4\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Области решений данных трех систем показаны на рис. 10. Как видно из рисунка, область решений системы 1) ограничена. Этот вывод можно сделать и на основании самой системы. Действительно, из 2, 3 и 4-го неравенств системы следует, что каждая из переменных x_1 и x_2 снизу ограничена числом 0, а сверху по крайней мере числом 35.

Область решений системы 2) ограничена сверху. Это можно было бы заключить из самой системы неравенств после их несложных преобразований. Сложив оба неравенства, получим $4x_1 \leqslant 12$, откуда следует ограниченность переменной x_1. Так как из 1-го неравенства $x_2 \leqslant 2 + x_1$, то отсюда следует, что и вторая переменная

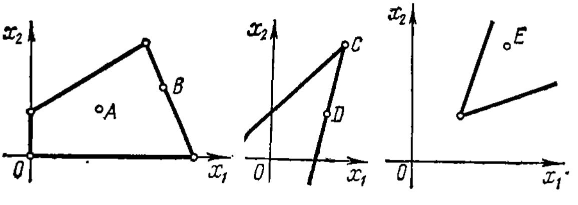

РИС. 10

ограничена. Как видно из рисунка, рассматриваемая область не ограничена снизу.

Наконец, область решений системы 3) ограничена снизу, но не ограничена сверху. Действительно, умножив 2-е неравенство на 3 и сложив оба неравенства, получим $8x_2 \geqslant 16$, откуда следует $x_2 \geqslant 2$. Но из 1-го неравенства $3x_1 \geqslant 4 + x_2$, откуда $x_1 \geqslant 2$. Таким образом, обе переменные ограничены снизу.

69. Определить, какие из точек A, B, C, D, E, показанных на рис. 10, внутренние, какие граничные и какие угловые?

70. Как изменить исходные неравенства в задаче 68, чтобы изображенные на рис. 10 области их решения оказались: открытыми? ограниченными?

Указание. Область называется *открытой*, если она содержит только внутренние точки.

71. Используя теорему о представлении, выразить точку $\bar{X} = (6, 3)$ через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 7x_2 &\leqslant 13 \\ 6x_1 - x_2 &\leqslant 47 \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 11 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Область решений этой системы представляет собой треугольник с вершинами $\bar{X}_1 = (2, 3)$, $\bar{X}_2 = (9, 7)$, $\bar{X}_3 = (8, 1)$. Согласно теореме о представлении выпуклого многогранника, можно записать

$$\bar{X} = t_1\bar{X}_1 + t_2\bar{X}_2 + t_3\bar{X}_3,$$

где $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ и все $t_i \geqslant 0$.

Подставляя в это равенство выражения для векторов, выполнив указанные действия и переходя к соответствующим равенствам между координатами векторов, получим два уравнения для определения неизвестных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} 2t_1+9t_2+8t_3&=6\\ 3t_1+7t_2+t_3&=3\end{aligned}\right\}.$$

Добавив к ним уравнение

$$t_1+t_2+t_3=1,$$

получим систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Решив эту систему, получим $t_1 = 7/19$, $t_2 = 4/19$, $t_3 = 8/19$. Все эти коэффициенты удовлетворяют второму условию выпуклости ($t_i \geqslant 0$). Поэтому искомое представление запишется в виде

$$\bar{X}=1/19\,(7\bar{X}_1+4\bar{X}_2+8\bar{X}_3).$$

72. Определить, какие из следующих областей являются ограниченными, установить характер ограниченности и, используя теорему о представлении, записать формулу для любой точки $\bar{X}$ ограниченной области и для данной точки $\bar{X}_1 = (6, 5)$.

$$1)\ \left.\begin{aligned} -6x_1+7x_2&\leqslant 26\\ 3x_1+4x_2&\leqslant 47\\ x_1-x_2&\leqslant 4\\ x_1+x_2&\geqslant 0\end{aligned}\right\};\qquad 2)\ \left.\begin{aligned} -x_1+2x_2&\leqslant 6\\ 5x_1-2x_2&\leqslant 26\\ x_1+2x_2&\geqslant 10\end{aligned}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 5x_1-2x_2&\geqslant 7\\ 5x_1-2x_2&\leqslant 36\\ 2\leqslant x_1&\leqslant 7\end{aligned}\right\};\qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 5x_1-3x_2&\geqslant 4\\ x_2&\geqslant 2\end{aligned}\right\};$$

$$5)\ \left.\begin{aligned} -3x_1+4x_2&\leqslant 6\\ x_1\qquad&\leqslant 6\end{aligned}\right\};\qquad 6)\ \left.\begin{aligned} -3x_1+4x_2&\leqslant 12\\ 3x_1-x_2&\leqslant 6\\ 3x_1+2x_2&\leqslant -1\end{aligned}\right\}.$$

73. Найти уравнение гиперплоскости, нормальной к вектору $\bar{C} = (2, 5, —3, 4)$ и проходящей через точку $\bar{a} = (0, 3, 1, 2)$.

Решение. Уравнение гиперплоскости имеет вид $\bar{C}\bar{X} = a_0$. Поскольку гиперплоскость проходит через точку $\bar{a}$, вектор $\bar{a}$ должен удовлетворять уравнению гиперплоскости, т. е. $\bar{C}\bar{a} = a_0$. Вычитая почленно данное равенство из предыдущего, получим

$$\bar{C}\,(\bar{X}-\bar{a})=0.$$

Это и есть искомое уравнение гиперплоскости. Раскрывая скалярное произведение векторов, получим уравнение в координатной форме

$$2\,(x_1-0)+5\,(x_2-3)-3\,(x_3-1)+4\,(x_4-2)=0.$$

74. Найти уравнения гиперплоскостей, проходящих через точки $\bar{X}_1 = (2, 1, 0, 5)$, $\bar{X}_2 = (0, 4, 1, 2)$, $\bar{X}_3 = (3, 0, 2, 0)$ и перпендикулярных вектору $\bar{C} = (2, 0, 5, 1)$.

75. Найти угловые точки области допустимых решений следующих систем уравнений и записать в общем виде любое допустимое их решение:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5&=5\\ 2x_1\qquad\qquad+x_3-2x_4\qquad&=3 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0\,(i=1,\ \ldots\ 5);$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} x_1+x_2-\ x_3&=10\\ x_1-x_2+7x_3&=\ 7 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0;$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 4x_1+5x_2+x_3+x_4&=29\\ 6x_1-\ x_2-x_3+x_4&=11 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0\ \ (i=1,\ \ldots,\ 4);$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} x_1+2x_2+\ x_3&=4\\ 2x_1+2x_2+5x_3&=5 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$$

Указание. Первая часть задачи решается на основании теоремы о соответствии угловых точек опорным решениям. При решении второй части задачи используется теорема о представлении ограниченной области допустимых решений, для чего необходимо предварительно убедиться в ограниченности области.

76. Доказать, что для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} -5x_1+6x_2+x_3-x_4&=6\\ x_1-3x_2\qquad\ +x_4&=6 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0$$

область допустимых решений является неограниченной. Превратить ее в ограниченную область путем введения дополнительного ограничения и определить угловые точки образованного таким путем многогранника.

Решение. Для доказательства неограниченности области допустимых решений систему необходимо последовательно приводить к опорным решениям, пока на какой-то итерации не окажется столбец с неположительными элементами. Это и будет свидетельствовать о неограниченности области. Если при переборе всех опорных решений системы такого столбца не окажется, то область ограниченная. Так, разрешив данную систему относительно x_3 и x_4, получим

$$\left.\begin{aligned} -4x_1+3x_2+x_3 \quad &= 12 \\ x_1-3x_2 \quad +x_4 &= \ 6 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(А)}$$

и опорное решение $\bar{X}_0=(0,\ 0,\ 12,\ 6)$.

Здесь не оказалось столбца с неположительными элементами. Поэтому продолжим симплексные преобразования системы (см. § 4 гл. I).

Вводя в базис x_1 вместо x_4, получим

$$\left.\begin{aligned} -9x_2+x_3+4x_4 &= 36 \\ x_1-3x_2 \quad +\ x_4 &= \ 6 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Б)}$$

и опорное решение $\bar{X}_1=(6,\ 0,\ 36,\ 0)$.

В этой системе 2-й столбец состоит только из отрицательных элементов. Следовательно, область допустимых решений неограниченная. Действительно, придавая свободной переменной x_2 в системе (Б) сколь угодно большие значения ($x_2 \to \infty$), мы будем получать неотрицательные значения x_1 и x_3.

О неограниченности области допустимых решений можно судить и из рис. 11, на котором изображена область допустимых значений свободных переменных x_1 и x_2 для системы (А).

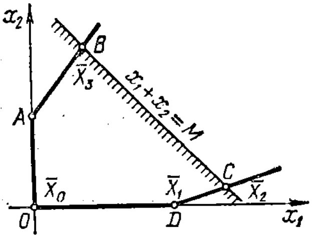

РИС. 11

Для образования ограниченной области необходимо ввести дополнительное ограничение вида $x_1+x_2+x_3+x_4 \leqslant M$ в исходную систему или аналогичное ограничение на свободные переменные в системах (А) или (Б). Так, добавив к системе (А) ограничение

$$x_1+x_2 \leqslant M \text{ или } x_1+x_2+x_5=M, \quad \text{(В)}$$

получим систему трех уравнений с пятью переменными. Дополнительное ограничение (В) как бы отсекает от неограниченной области (см. рис. 11) пятиугольник $ABCDO$ с дополнительными двумя угловыми точками C и B, которым отвечают опорные решения

$$\bar{X}_2=\left(\frac{3M+6}{4},\ \frac{M-6}{4},\ \frac{90+9M}{4},\ 0,\ 0\right) \text{ и}$$

$$\bar{X}_3=\left(\frac{3M-12}{7},\ \frac{12+4M}{7},\ 0,\ \frac{90+9M}{7},\ 0\right).$$

77. Доказать неограниченность области допустимых решений следующих систем уравнений, превратить эти области в многогранники и определить их угловые точки:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1-\ x_2-3x_3+x_4 &= 8 \\ -2x_2+x_3 \quad &= 2 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0 \ (i=1,\ \ldots,\ 4);$$

2) $$\left.\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5);$$

3) $$\left.\begin{aligned} -2x_2 + x_3 \quad + 3x_5 &= 24 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \quad &= 5 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5);$$

4) $$\left.\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 \quad &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \quad &= 13 \\ x_1 - 2x_2 \quad + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5).$$

78. В следующих задачах линейного программирования с ограниченной областью допустимых решений найти оптимальное решение, опираясь только на фундаментальную теорему:

1) $$z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 \ (\max),$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 5 \\ 2x_1 \quad + x_3 - 2x_4 \quad &= 3 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5);$$

2) $$z = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \ (\min),$$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1 - 5x_2 \quad - x_4 + x_5 &= -4 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5);$$

3) $$z = x_1 - 2x_2 \quad + 4x_4 - x_5 \ (\max),$$
$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 42 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 16 \\ 4x_1 \quad + x_4 + x_5 &= 32 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5);$$

4) $$z = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad - x_5 \ (\max),$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 \quad + 2x_5 &= 8 \\ 4x_2 \quad + 3x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}\right\},$$
$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, 5).$$

ГЛАВА IV

Симплексный метод

79. На некотором этапе расчетов симплексным методом получена следующая таблица:

c_i	Баз. перем.							−4	−2		2	3
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
	x_1	12	1					2	−1	1		
	x_2	5		1				1			1	
	x_3	20			1			2	2	1		−2
	x_4	10				1		1	−1	−2	$\boxed{2}$	−2
	x_5	24					1	−2	2		−2	1
	z							4	2		−2	−3

1. Проверить правильность расчетов с помощью одного из методов контроля.

2. Записать условия задачи аналитически.

3. Определить особенность следующего опорного решения при указанном выборе разрешающего столбца, не проводя очередной итерации.

4. Выполнить очередную итерацию, выбрав разрешающий столбец из условия наибольшего увеличения функции z.

Решение. 1. Контроль правильности расчетов производится с помощью сравнения элементов индексной строки с результатом расчетов по формуле

$$\sum_i c_i a_{ik} - c_k = a_{0k}.$$

В данном случае имеем $c_i = 0$ (при $i = 1, \ldots, 5$), поэтому

$$\sum_i c_i a_{ik} - c_k = -c_k.$$

При $k = 6, 7, 9$ и 10 получаем $-c_6 = -(-4) = 4$, $-c_7 = -(-2) = 2$, $-c_9 = -2$ и $-c_{10} = -3$, что совпадает с соответствующими элементами индексной строки.

2. 1-я строка таблицы соответствует уравнению

$$x_1 + 2x_6 - x_7 + x_8 = 12.$$

Аналогично записываются остальные уравнения. Из индексной строки получаем выражение для целевой функции

$$z = -4x_6 - 2x_7 + 2x_9 + 3x_{10} \quad (\max).$$

Так как в таблице выделенный разрешающий столбец имеет отрицательный элемент в индексной строке ($a_{09} = -2$), то функция z максимизировалась.

3. В данной таблице $a_{20} : a_{29} = 5$ и $a_{40} : a_{49} = 5$, следовательно, в следующей таблице окажется вырожденное опорное решение.

При этом нулевое значение примет базисная переменная, находящаяся в строке, которой соответствует отношение $a_{i0} : a_{ip}$ такое же, как в разрешающей строке (т. е. $x_2^* = 0$).

4. Из формулы $\Delta z = -a_{0p}\dfrac{a_{q0}}{a_{qp}}$ заключаем, что большее изменение функции z произойдет, если выбрать в качестве разрешающего 10-й столбец [$\Delta z = -(-3)\,24/1 = 72$ вместо $\Delta z = -(-2)\,10/2 = 10$].

80. По нижеприведенной симплексной таблице определить:

1) оптимальное решение и $z_{\max}$;

2) на сколько изменится функция z при увеличении x_7 на 5 единиц?

3) исходное выражение для целевой функции;

4) является ли область допустимых решений ограниченной?

5) существует ли минимум функции z?

c_i	Баз. перем.	30							−2	−3	2	3
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
		12	1					2	−1	1		
2		5		1				1			1	
		124	3	4	1		2	8	−3			
		140	6	2		1	2	11	−3			
3		58	2	2			1	4				1
	z	154	6	8			3	16	3		2	3

81. Дана следующая симплексная таблица:

c_i	Баз. перем.		1	2	2	1
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_4	2	2		—2	1
2	x_2	3	2	1	—1	
	z	8	5		—6	

1. Построить математическую модель задачи.

2. Решить задачу минимизации функции z и сопоставить это решение с графическим решением.

3. Объяснить алгебраически свойство неограниченности области допустимых решений и неограниченность функции z сверху.

82. Симплексная таблица для задачи максимизации функции имеет следующий вид:

c_i	Баз. перем.	5	2		—1	3	
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2		2	1	4		1	
—1		8		16	1	—2	
		3		5			1
		—9		—8		1	

Решить задачу симплексным методом и графически и объяснить особенности данной задачи.

83. Заполнить недостающие элементы следующей симплексной таблицы и закончить решение задачи на максимум функции z. Дать геометрическую интерпретацию решения задачи и объяснить ее особенности.

c_i	x_i	a_{i0}		1	−3	6	2
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1		1		−2	
		12			1	3	
		2	1			−1	
		4				1	1
	z						

84. Задача максимизации z решалась с помощью метода искусственного базиса. После некоторой итерации получилась следующая таблица:

c_i	Баз. перем.	10			3		$-M$	$-M$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-M$	x_6	9	2	4		−1		1
$-M$	x_5	3	−3	2		3	1	
3	x_3	4	1	$\boxed{5}$	1	2		
	z	2	3	15		6		
M	Σ	−12	1	−6		−2		

1. Проверить правильность заполнения индексных строк.
2. Записать в аналитической форме исходную и M-задачу.
3. Провести решение задачи до конца.

Решение. 1. Правильность заполнения индексных строк проверяем с помощью контрольной формулы $a_{0k} = \Sigma c_i a_{ik} - c_k$. В данном случае эта формула применяется отдельно для 1-й и 2-й индексных строк. При контроле 1-й индексной строки коэффициенты c_i из 1-го столбца и c_k из 1-й строки нужно выбирать не зависящими от M, а при контроле 2-й индексной строки — соответственно равные — M.

Так, для 1-й строки получаем:

$a_{00} = c_3 a_{30} - c_{00} = 3 \cdot 4 - 10 = 2$, $a_{01} = c_3 a_{31} - c_1 = 3 \cdot 1 - 0 = 3$ и т. д.

Для 2-й индексной строки, вынося за скобки и опуская множитель M, аналогично получаем:

$$a'_{00}=(-1)\cdot 9+(-1)\cdot 3-0=-12,$$
$$a'_{01}=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-3)-0=1,$$
$$a'_{02}=(-1)\cdot 4+(-1)\cdot 2-0=-6 \text{ и т. д.}$$

2. Аналитическую запись M-задачи получаем непосредственно из таблицы:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+4x_2 \quad -x_4 \quad +x_6=9 \\ -3x_1+2x_2 \quad +3x_4+x_5 \quad =3 \\ x_1+5x_2+x_3+2x_4 \quad =4 \end{array}\right\},$$
$$x_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,6),$$
$$z=-3x_1-15x_2-6x_4+2-M\,(x_1-6x_2-2x_4-12)\ (\max).$$

Таким образом, приходим к следующей модели исходной задачи:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+4x_2 \quad -x_4=9 \\ -3x_1+2x_2 \quad +3x_4=3 \\ x_1+5x_2+x_3+2x_4=4 \end{array}\right\},$$
$$x_1\geqslant 0,\ldots,x_4\geqslant 0,$$
$$z=3x_3-10\ (\max).$$

3. Для решения задачи выполняем очередную итерацию. Начинаем с выбора разрешающего столбца по отрицательной оценке во 2-й индексной строке. Так как в исходной таблице $a'_{02}=-6$ и $a'_{04}=-2$, то выбираем разрешающий столбец по наибольшей по абсолютной величине оценке $a'_{02}=-6$. Далее расчет ведется как и в обычном симплексном методе. Разрешающей строкой будет 3-я (так как min $\{4/5,\ 3/2,\ 9/4\}=4/5$). При переходе к новой таблице сначала преобразуем элементы разрешающей строки путем деления соответствующих старых элементов на разрешающий элемент $a_{32}=5$. Остальные элементы преобразуем по правилу «прямоугольника».

Так, для 1-го столбца получаем:

$$a_{10}=9-\frac{4\cdot 4}{5}=\frac{29}{5},\quad a_{20}=3-\frac{2\cdot 4}{5}=\frac{7}{5},$$
$$a_{00}=2-\frac{4\cdot 15}{5}=-10,\quad a'_{00}=-12-\frac{(-6)\cdot 4}{5}=-\frac{36}{5}.$$

После расчета элементов столбца производим контроль расчетов по указанной выше формуле:

$$a_{00}=\sum_i c_i a_{i0}-c_0=c_2a_{30}-c_0=0\cdot 4/5-10=-10,$$
$$a'_{00}=(-1)\,29/5+(-1)\,7/5-0=-36/5,$$

что совпадает с вычисленными выше значениями a_{00} и a'_{00}. Аналогично вычисляются элементы остальных столбцов.

После указанных действий переходим к следующей таблице:

c_i	Баз. перем.	10					$-M$	$-M$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-M$		29/5	6/5		—4/5	—13/5		1
M		7/5	—17/5		—2/5	11/5	1	
		4/5	1/5	1	1/5	2/5		
	z	—10			—3			
M	Σ	—36/5	11/5		6/5	2/5		

В данной таблице изменился состав базисных переменных (вместо x_3 базисной стала x_2) и в соответствии с этим в 1-м столбце коэффициент $c_3 = 3$ заменился на $c_2 = 0$.

Как видно из данной таблицы, дальнейшее улучшение решения невозможно, так как во 2-й индексной строке не оказалось отрицательных элементов. Следовательно, достигнуто оптимальное решение M-задачи. Но искусственные переменные x_5 и x_6 не выведены из базиса, следовательно, исходная задача не имеет решения, так как ее система ограничений несовместна в области допустимых решений.

Заметим, что этот вывод можно было сделать из исходной системы уравнений после несложных преобразований. Действительно, вычитая из 1-го уравнения удвоенное 3-е, получим уравнение

$$-6x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 1,$$

которое не может удовлетворяться при неотрицательных значениях x_1, x_3 и x_4.

85. Решить задачу 84, заменив значение $a_{32} = 5$ на число —12.

86. Методом искусственного базиса привести следующую систему к единичному базису с неотрицательным вектором $\bar{a}_0$:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -1 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 &= 11 \end{aligned}\right\}.$$

Указание. Умножить 1-е и 2-е уравнения на —1 и ввести в уравнения системы искусственные переменные x_6, x_7, x_8. После этого решить задачу минимизации функции $z = x_6 + x_7 + x_8$.

87. Привести с помощью искусственного базиса следующие системы уравнений к исходному опорному решению и исследовать графически область их допустимых решений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 7x_1-6x_2+x_3-x_4-x_5&=21\\ x_1-\ x_2\qquad\ +x_4-x_5&=11\\ 3x_1-\ x_2+x_3-x_4\qquad\ &=6 \end{aligned}\right\};$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} -x_1+6x_2-x_3+x_4&=9\\ 3x_1\qquad\ +x_3-x_4&=-3 \end{aligned}\right\}.$$

88. Следующие задачи линейного программирования решить симплексным методом и, где возможно, дать геометрическую интерпретацию процесса решения. Во всех примерах $x_i \geqslant 0$.

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&\leqslant 6\\ 2x_1+\ x_2&\leqslant 4\\ x_1\qquad&\leqslant 1\\ x_1-\ x_2&\geqslant -1\\ 2x_1+\ x_2&\geqslant 1 \end{aligned}\right\},\qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x_1-2x_2&\leqslant 0\\ x_1-\ x_2&\geqslant -1\\ x_1+\ x_2&\geqslant 1 \end{aligned}\right\},$$

$$z=x_1+2x_2\ (\max);\qquad z=x_1\ (\max);$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1-\ x_2&\geqslant -2\\ 5x_1+3x_2&\leqslant 15\\ x_2&\leqslant 2{,}5\\ x_1-2x_2&\leqslant 2\\ 2x_1-\ x_2&\geqslant -2 \end{aligned}\right\},$$

$$z=4x_1+3x_2\ (\max);$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3\qquad\qquad&=1\\ x_1-x_2\qquad+x_4\qquad&=1\\ x_1+x_2\qquad\qquad+x_5&=2 \end{aligned}\right\},$$

$$z=2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5\ (\max);$$

$$5)\ \left.\begin{aligned} x_1\qquad\qquad-\ x_4\qquad\quad-2x_6&=5\\ x_2\qquad+2x_4-3x_5+\ x_6&=3\\ x_3+2x_4-5x_5+6x_6&=5 \end{aligned}\right\},$$

$$z=x_1+x_2+x_3\ (\min);$$

6) $$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 + 6x_5 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \qquad + 2x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 2x_5 &= 6 \end{aligned}\right\},$$

$$z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \text{ (min)};$$

7) $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned}\right\},$$

$$z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4 \text{ (min)};$$

8) $$\left.\begin{aligned} -2x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 + x_5 &\geqslant 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 + x_6 &\geqslant 0 \\ x_1 - 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 &\geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1 \end{aligned}\right\},$$

$$z = x_4 - x_5 \text{ (max)};$$

9) $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\},$$

$$z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \text{ (min)};$$

10) $$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &\leqslant 12 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad\quad &\leqslant 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad - 2x_5 &\leqslant 20 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_6 &\leqslant 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\leqslant 24 \end{aligned}\right\},$$

$$z = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \text{ (max)};$$

11) $$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

$$z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \text{ (min)};$$

12) $$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad\qquad\qquad &\leqslant 10 \\ 2x_1 \qquad\qquad + 5x_4 \qquad\quad &\geqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad - 2x_5 &\leqslant 20 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &\geqslant 15 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\leqslant 25 \end{aligned}\right\},$$

$$z = -x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5 \text{ (max)};$$

13) $$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \leqslant 5 \\ x_2 + x_5 \geqslant 3 \end{array}\right\},$$

$$z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \ (\min).$$

89. Составить последнюю симплексную таблицу и записать модель задачи, состоящей из четырех ограничений и шести переменных и обладающей следующими особенностями:

1) единственное решение для $z_{\max}$ и неразрешимость для $z_{\min}$;

2) альтернативный оптимум;

3) вырожденное решение с двумя базисными нулями;

4) неразрешимость задачи из-за пустой области допустимых решений.

Все задачи проиллюстрировать графически.

ГЛАВА V

Теория двойственности

§ 1. СОСТАВЛЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

I. Общая форма модели

Исходная задача I	Двойственная задача I′
1. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \leqslant a_{i0},\ i=1,\dots,l;$	$y_i \geqslant 0,\ i=1,\dots,l;$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i0},\ i=l+1,\dots,m;$	y_i — произвольные, $i=l+1,\dots,m;$
3. $x_n \geqslant 0,\ k=1,\dots,s,\ s \leqslant n;$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}y_i \geqslant c_k,\ k=1,\dots,s;$
4. x_k — произвольные, $k=s+1,\dots,n;$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}y_i = c_k,\ k=s+1,\dots,n;$
5. $z=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$ (max)	$T=\sum\limits_{i=1}^{m} a_{i0}y_i$ (min).

Общее правило построения двойственной пары

1. Каждому i-му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i двойственной задачи и, наоборот, каждому k-му ограничению двойственной задачи соответствует переменная x_k исходной задачи.

2. Матрицы A ограничений 1—2 и A' ограничений 3′ — 4′ взаимно транспонированы. Следовательно, строка коэффициентов a_{ik} в k-м ограничении двойственной задачи есть столбец коэффициентов при x_k в ограничениях 1—2 исходной задачи и наоборот.

3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом максимизация меняется на минимизацию, и наоборот.

4. В исходной задаче ограничения-неравенства следует записывать со знаком «$\leqslant$» при максимизации и со знаком «$\geqslant$» при минимизации.

5. Каждому i-му ограничению-неравенству исходной задачи соответствует в двойственной задаче *условие неотрицательности* ($y_i \geqslant 0$), а *равенству* — переменная y_i без ограничений на знак («произвольная»). Наоборот, *неотрицательной* переменной $x_k \geqslant 0$ соответствует в двойственной задаче k-е ограничение-неравенство, а произвольной переменной — равенство.

Замечание. Соотношение двойственности *взаимное*, т. е. задача, двойственная по отношению к двойственной, совпадает с исходной.

В случаях, когда исходная задача задана в форме стандартной или канонической модели, получаем частные виды сопряженных пар задач.

II. Симметричные двойственные задачи

Исходная (стандартная форма)	Двойственная
1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \leqslant a_{i0}$, $i=1, \ldots, m$;	$y_i \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$;
2. $x_k \geqslant 0$, $k=1, \ldots, n$;	$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}y_i \geqslant c_k$, $k=1, \ldots, n$;
3. $z=\sum_{k=1}^{n} c_kx_k$ (max).	$T=\sum_{i=1}^{m} a_{i0}y_i$ (min).

III. Исходная задача в канонической форме

Исходная	Двойственная
1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i0}$, $i=1, \ldots, m$;	y_i — произвольные;
2. $x_k \geqslant 0$, $k=1, \ldots, n$;	$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_i \geqslant c_k$, $k=1, \ldots, n$;
3. $z=\sum_{k=1}^{n} c_kx_k$ (max).	$T=\sum_{i=1}^{m} a_{i0}y_i$ (min).

90. Построить двойственную задачу к следующей, заданной в форме общей модели:

$$\left.\begin{array}{ll}(y_1) & x_1-2x_2+x_3+3x_4-2x_5=6\\ (y_2) & 2x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5\leqslant 4\\ (y_3) & x_1\qquad+3x_3\qquad-4x_5\geqslant 8\end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0,$$

$$z=x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5\ (\min).$$

Решение. Прежде чем приступить к построению двойственной задачи, необходимо упорядочить запись исходной задачи. Так как целевая функция минимизируется, то неравенства должны быть записаны с помощью знака «$\geqslant$». Для этого второе неравенство умножим на —1, после чего оно запишется в виде

$$-2x_1-3x_2+2x_3+x_4-x_5\geqslant -4.$$

Теперь введя три переменные y_1, y_2 и y_3, запишем в соответствии с указанным правилом двойственную задачу:

$$\left.\begin{array}{l}y_1-2y_2+y_3\leqslant 1\\ -2y_1-3y_2\qquad=-2\\ y_1+2y_2+3y_3\leqslant 1\\ 3y_1+y_2\qquad=-1\\ -2y_1-y_2-4y_3\leqslant 1\end{array}\right\},$$

$$y_2\geqslant 0,\ y_3\geqslant 0,$$

$$T=6y_1-4y_2+8y_3\ (\max).$$

Второе и четвертое ограничения выражены в виде равенств, так как соответствующие им переменные x_2 и x_4 не подчинены условиям неотрицательности. Условия неотрицательности в двойственной задаче наложены только на переменные y_2 и y_3, так как им соответствуют в исходной задаче ограничения в виде неравенств.

91. Показать, что двойственная задача по отношению к полученной в задаче 90 будет совпадать с исходной.

92. Построить двойственную задачу к следующей, заданной в канонической форме:

$$\left.\begin{array}{l}x_1-2x_2\qquad+3x_4+x_5=8\\ \qquad x_2+x_3+x_4-2x_5=6\end{array}\right\}$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0,$$

$$z=-2x_2+x_4+3x_5\ (\max).$$

Решение. Двойственную задачу можно построить двумя способами.

I способ. Следуя общему правилу, введем две переменные y_1 и y_2 и запишем двойственную задачу:

$$\left.\begin{array}{r} y_1 \qquad \geqslant 0 \\ -2y_1 + y_2 \geqslant -2 \\ y_2 \geqslant 0 \\ 3y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ y_1 - 2y_2 \geqslant 3 \end{array}\right\},$$

$$T = 8y_1 + 6y_2 \ (\min),$$

y_i — произвольные.

II способ. Отбрасывая в первом и втором уравнениях базисные переменные x_1 и x_2, перейдем к стандартной форме модели:

$$\left.\begin{array}{r} -2x_2 + 3x_4 + x_5 \leqslant 8 \\ x_2 + x_4 - 2x_5 \leqslant 6 \end{array}\right\},$$

$$x_2 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0, \ x_5 \geqslant 0,$$

$$z = -2x_2 + x_4 + 3x_5 \ (\max).$$

Записав для нее симметричную двойственную задачу, получим тот же результат, что и при использовании I способа.

93. Составить двойственные задачи к следующим исходным и показать взаимосопряженность соответствующих пар задач:

1) $$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leqslant 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 3 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_4 \geqslant 0,$$

$$z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \ (\max);$$

2) $$\left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_4 \geqslant 0,$$

$$z = 3x_2 - x_4 \ (\max);$$

3) $$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geqslant 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leqslant 4 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0,$$

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \ (\min);$$

4) $$\left.\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 \qquad + 3x_3 - 3x_4 = 8 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_4 \geqslant 0,$$

$$z = 2x_1 - x_2 + 5x_4 \ (\min);$$

$$\begin{array}{ll}
5)\ \left.\begin{array}{r} x_1-3x_2+\ x_3\geqslant 4\\ 2x_1+\ x_2-2x_3\geqslant 1\end{array}\right\}, & 6)\ \left.\begin{array}{r} x_1-2x_2+x_3\leqslant 4\\ 2x_1+3x_2-x_3\geqslant 2\end{array}\right\},\\
x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0, & x_1\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\\
z=-x_1+x_2+x_3\ (\max); & z=2x_1+4x_2+x_3\ (\min).
\end{array}$$

§ 2. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Основная теорема двойственности. 1) *Если одна из сопряженных задач имеет оптимальное решение* X^*, *то и вторая имеет оптимальное решение* Y^*; *при этом* $z(X^*)=z_{\max}=T(Y^*)=T_{\min}$.

2) *Если одна из задач неразрешима из-за неограниченности целевой функции* ($z_{\max}\to\infty$, *или* $T_{\min}\to-\infty$), *то область допустимых решений второй задачи пустая.*

Из этой теоремы вытекают **необходимые** и **достаточные условия:**

а) разрешимости задач — *существование хотя бы одного допустимого плана у каждой задачи;*

б) оптимальности допустимых планов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — *выполнение равенства*

$$z(\overline{X})=T(\overline{Y}). \tag{1}$$

94. На основании графического анализа двойственной задачи исследовать разрешимость следующих задач, и в случае разрешимости найти экстремальное значение целевой функции:

$$\begin{array}{ll}
1)\ \left.\begin{array}{r} -x_1+2x_2+x_3\geqslant 2\\ 3x_1+\ x_2-x_3\geqslant 1\end{array}\right\}, & 2)\ \left.\begin{array}{r} 2x_1+2x_2-\ x_3-x_4=1\\ -x_1+\ x_2+3x_3+x_4=1\end{array}\right\},\\
x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0, & x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0,\\
z=6x_1+9x_2+3x_3\ (\min); & z=2x_1-2x_2+x_3+3x_4\ (\min);
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3)\ \left.\begin{array}{r} -x_1+\ x_2+\ x_3=2\\ x_1-3x_2-2x_3=1\end{array}\right\},\\
x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\\
z=2x_1+x_2+2x_3\ (\min);
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4)\ \left.\begin{array}{r} x_1\qquad\ -3x_3+\ x_4\leqslant -2\\ -x_1-x_2-2x_3+3x_4\leqslant 2\end{array}\right\},\\
z=2x_1+4x_2+23x_3+4x_4\ (\min);
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
5)\ \left.\begin{array}{r} x_1+3x_2+\ x_3\leqslant -2\\ x_1-4x_2+4x_3\geqslant 1\end{array}\right\}, & 6)\ \left.\begin{array}{r} x_1-13x_2+3x_3\leqslant -1\\ 2x_1+17x_2-7x_3\geqslant 2\end{array}\right\},\\
x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\\
z=3x_1-12x_2+4x_3\ (\min); & z=6x_1+223x_2-42x_3\ (\min).
\end{array}$$

95. В следующих задачах дать геометрическую интерпретацию исходной и двойственной задач и найти оптимальные решения для разрешимых задач:

$$1)\ \left.\begin{aligned} -x_1+3x_2&\leqslant 6\\ 3x_1-\ x_2&\leqslant 6\end{aligned}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{aligned} -2x_1+x_2&\leqslant 2\\ x_1-x_2&\leqslant 2\end{aligned}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\qquad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$$

$$z=x_1+x_2\ (\max);\qquad z=2x_1+x_2\ (\max);$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 3x_1-\ x_2&\geqslant 1\\ -x_1+3x_2&\geqslant 5\end{aligned}\right\},\quad 4)\ \left.\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3\qquad&=4\\ x_1-\ x_2\qquad+x_4&=3\end{aligned}\right\},$$

$$z=2x_1+x_2\ (\min);\qquad x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0,$$

$$z=3x_1+x_2\ (\max);$$

$$5)\ \left.\begin{aligned} 3x_1+5x_2+x_3+x_4&=32\\ x_1-3x_2-x_3+x_4&=-8\end{aligned}\right\},\quad 6)\ \left.\begin{aligned} x_1-x_2&\leqslant 1\\ x_1-x_2&\geqslant 1\end{aligned}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0,\qquad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$$

$$z=3x_1-x_2-x_3+x_4\ (\max);\qquad z=x_1-x_2\ (\max).$$

96. Для каждой из пары двойственных задач возможны три альтернативы: задача разрешима (Р), функция неограниченная (Н), область пустая (П). Это позволяет, вообще говоря, составить 9 сочетаний: РР (обе задачи разрешимы), РН (первая разрешима, во второй функция не ограничена) и т. д. Указать, какие сочетания альтернатив возможны.

97. Привести примеры двойственных пар, обладающих следующими свойствами:

1) обе задачи имеют оптимальные решения;

2) одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, вторая — пустую область;

3) области допустимых решений обеих задач пустые;

4) области допустимых решений обеих задач неограниченные.

98. Определить, являются ли данные векторы $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ оптимальными решениями данной задачи и двойственной к ней:

$$1)\ z=x_1+10x_2+8x_3\ (\max),$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+4x_2+x_3&=2\\ x_1+2x_2-x_3&=0\end{aligned}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,$$

$$\overline{X}=(1,\ 0,\ 1),\ \overline{Y}=\left(\frac{9}{2},\ -\frac{7}{2}\right);$$

$$2)\ z=x_1+4x_2+x_3\ (\max),$$

$$\left.\begin{array}{l}5x_1+12x_2+2x_3=9\\3x_1+10x_2+4x_3=11\end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,$$

$$\overline{X}=(1,\ 0,\ 2),\ \overline{Y}=\left(\frac{3}{14},\ \frac{1}{14}\right).$$

Указание. Составить двойственную задачу и проверить, удовлетворяет ли ее ограничениям вектор $\overline{Y}$. Если да, то сравнить значения $z(X)$ и $T(\overline{Y})$.

Пусть исходная задача задана в канонической форме:

$$A\overline{X}=\overline{a}_0,\ \overline{X}\geqslant 0,\ z=\overline{C}\overline{X}\ (\max). \tag{1}$$

Введем обозначения: $\overline{X}^*$ — ее оптимальные решения; $\overline{C}_б^*$ — вектор-строка коэффициентов c_k при базисных переменных в оптимальном решении; B — матрица коэффициентов в исходной системе уравнений, при базисных переменных x_k в решении $\overline{X}^*$.

Тогда оптимальное решение $\overline{Y}^*$ двойственной задачи может быть получено из равенства

$$\overline{Y}^*=\overline{C}_б^*B^{-1}. \tag{2}$$

99. Используя соотношение (2), найти решение двойственной задачи к следующей: максимизировать

$$z=-3x_1+5x_2+x_3-x_4$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l}3x_1+8x_2+x_3+x_4=50\\5x_1-4x_2-x_3+x_4=14\end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0.$$

Решение. Двойственная задача запишется в виде:

$$\begin{array}{ll}3y_1+5y_2\geqslant -3, & y_1-y_2\geqslant 1,\\8y_1-4y_2\geqslant 5, & y_1+y_2\geqslant -1,\end{array}\quad T=50y_1+14y_2\ (\min).$$

Исходная задача может быть решена одним из известных методов, в том числе графически. Ее решение есть $\overline{X}^*=(6,\ 4,\ 0,\ 0)$, при этом $z_{\max}=2$. В этом решении базисными переменными оказались $x_1=6$ и $x_2=4$. Поэтому $\overline{C}_б^*=(-3,\ 5)$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 8\\5 & -4\end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу $B^{-1}=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}4 & 8\\5 & -3\end{pmatrix}$ (см. гл. I, § 2). Тогда на основании равенства (2) имеем

$$\overline{Y}^*=(-3,\ 5)\frac{1}{52}\begin{pmatrix}4 & 8\\5 & -3\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right),$$

откуда

$$T_{\min}=2=z_{\max}.$$

100. Используя соотношение (2), решить двойственные задачи к задачам 94 (1), 94 (2), 94 (4) и 95 (6).

Если исходная задача (1) решается симплексным методом, то матрица B^{-1} оказывается расположенной в последней таблице против первоначальных единичных столбцов.

Пусть в исходной таблице имеется единичный столбец с единицей на i-м месте. Этот столбец соответствует базисной переменной x_{k_i} и коэффициенту c_{k_i} в заданной функции z. В конечной таблице этот столбец преобразуется в столбец матрицы B^{-1}, которому отвечает оценка a_{0k_i}.

Тогда на основании равенства (2) и формулы для вычисления оценок в симплексной таблице получаем следующие соотношения для вычисления оптимальных значений двойственных переменных:

$$y_i^*=a_{0k_i}+c_{k_i}. \qquad (3)$$

Это соотношение сохраняет силу и в том случае, когда исходная задача решается методом искусственного базиса.

Наконец, если имеется симметричная двойственная пара, то единичный базис исходной задачи образован совокупностью балансовых переменных, не входящих в целевую функцию. Поэтому формула (3) преобразуется в следующую:

$$y_i^*=a_{0k_i}. \qquad (4)$$

101. Определить оптимальное решение двойственной задачи к задаче 99, используя решение исходной симплексным методом.

Решение. Ниже приведена исходная и полученная после II итерации последняя симплексная таблица.

Исходная таблица

$\bar{C}_б$	Баз. перем.	$\bar{a}_0$	-3	5	1	-1	$-M$	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-M$	x_5	50	3	8	1	1	1	0
$-M$	x_6	14	$\boxed{5}$	-4	-1	1	0	1
	z	0	3	-5	-1	1	0	0
	$M\Sigma$	-64	-8	-4	0	-2	0	0

Окончательная таблица

5	x_2	4	0	1	2/13	1/26	5/52	−3/52
−3	x_1	6	1	0	−1/13	3/13	1/13	2/13
	z	2	0	0	0	1/2	1/4	−3/4
	$M\Sigma$	0	0	0	0	0	1	1

В исходной таблице единичные столбцы отвечают переменным $x_{k_1} = x_5$ и $x_{k_2} = x_6$ (искусственные переменные). Им отвечают коэффициенты $c_5 = c_6 = 0$, так как эти переменные в функцию z не входят. По формуле (3) получаем

$$y_1^* = a_{05} + c_5 = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad y_2^* = a_{06} + c_6 = -\frac{3}{4}.$$

102. Решить двойственные задачи, используя решение исходных задач с помощью симплексных таблиц:

$$1)\ \left.\begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 15 \end{array}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{array}{r} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - x_2 \leqslant 5 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \qquad\qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

$$z = 4x_1 + 2x_2\ (\max); \qquad z = 2x_1 + 3x_2\ (\max);$$

$$3)\ \left.\begin{array}{r} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - x_2 \leqslant 5 \end{array}\right\}, \qquad 4)\ \left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 1 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad = 1 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 2 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \qquad\qquad x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0,$$

$$z = x_1 - 2x_2\ (\max); \qquad z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5\ (\max);$$

$$5)\ \left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}, \qquad 6)\ \left.\begin{array}{r} -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + x_2 \geqslant 5 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_4 \geqslant 0, \qquad\qquad x_1 \geqslant 0,$$

$$z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4\ (\min); \qquad z = 2x_1 + x_2\ (\min);$$

$$7)\quad \left.\begin{array}{r} -4x_1+3x_2\leqslant 12\\ x_1-4x_2\leqslant 4\\ 6x_1+5x_2\geqslant 30 \end{array}\right\},\quad \begin{array}{c} x_2\geqslant 0,\\ z=2x_1+x_2\ (\max); \end{array}$$

$$8)\quad \left.\begin{array}{r} -4x_1+3x_2\leqslant 12\\ x_1-4x_2\leqslant 4\\ 6x_1+5x_2\geqslant 30 \end{array}\right\},\quad \begin{array}{c} x_2\geqslant 0,\\ z=2x_1+x_2\ (\min). \end{array}$$

103. Решить следующие задачи, используя данные симплексных таблиц при решении двойственных задач:

$$1)\quad \left.\begin{array}{r} 3x_1-2x_2+x_3\geqslant 5\\ x_1+x_2+2x_3\geqslant 10\\ -2x_1+3x_2-x_3\geqslant 2 \end{array}\right\},\quad \begin{array}{c} x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\\ z=x_1+3x_2+2x_3\ (\min); \end{array}$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{r} x_1-x_2-2x_3+x_4\geqslant 6\\ -x_1+x_3\leqslant 2\\ 2x_2-3x_3+2x_4\leqslant 8 \end{array}\right\},\quad \begin{array}{c} x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0,\\ z=x_1+x_2+x_3+x_4\ (\min); \end{array}$$

$$3)\quad \left.\begin{array}{r} x_1\geqslant 10\\ -2x_1+x_2\leqslant 8\\ x_1-2x_2\geqslant 12\\ x_2\geqslant 2 \end{array}\right\},\quad z=x_1-2x_2\ (\min);$$

$$4)\quad \left.\begin{array}{r} 2x_1-x_2+x_3=6\\ x_1+2x_2-x_3=4 \end{array}\right\},\quad \begin{array}{c} x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_3\geqslant 0,\\ z=3x_1+x_2+x_3\ (\max); \end{array}$$

$$5)\quad \left.\begin{array}{r} x_1-3x_2+6x_3+x_4+10x_5+x_6=29\\ x_1+5x_2-5x_3-x_4+2x_5=-5\\ 2x_2+x_3+x_4-8x_5-x_6=2 \end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_6\geqslant 0,$$

$$z=-2x_2-4x_3+2x_5\ (\max);$$

$$6)\quad \left.\begin{array}{r} 2x_1+x_2-3x_3=10\\ x_1+x_3+x_4=7\\ -3x_1-2x_3+x_5=4 \end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0,$$

$$z=2x_1-x_2+3x_3+x_4\ (\max);$$

$$7)\quad \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2-x_3+3x_4=6\\ x_2+2x_3-x_4=4\\ 2x_1+x_3+x_4=6 \end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0,$$

$$z=-x_1+x_2-x_3+x_4\ (\max).$$

§ 3. ВТОРАЯ И ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Вторая теорема двойственности (теорема о дополнительной нежесткости). *Для того чтобы два допустимых решения* $\bar{X}^*$ и $\bar{Y}^*$ *пары двойственных задач были их оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений*

$$x_k^*\left(\sum a_{ik}y_i^*-c_k\right)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad \text{(A)}$$

$$y_i^*\left(\sum a_{ik}x_k^*-a_{i0}\right)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad \text{(Б)}$$

Эта теорема позволяет:

а) установить оптимальность решения одной задачи по свойствам решения двойственной;

б) найти оптимальное решение одной задачи по решению двойственной.

Теорема верна для симметричной двойственной пары. Для задач в канонической и общей форме соотношения (А) и (Б) верны только для ограничений в виде неравенств и для неотрицательных переменных.

104. Найти решение следующей задачи путем графического анализа двойственной задачи:

$$\left.\begin{array}{ll} (y_1) & 4x_1 \qquad\quad +x_3+x_4=16 \\ (y_2) & 6x_1-4x_2-x_3+x_4=4 \end{array}\right\},$$

$$x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0,$$

$$z=5x_1+x_2+x_3+x_4-16\ (\max).$$

Решение. Двойственная задача запишется в виде

$$4y_1+6y_2\geqslant 5,\quad y_1-y_2\geqslant 1,$$
$$-4y_2\geqslant 1,\quad y_1+y_2\geqslant 1,$$
$$T=16y_1+4y_2-16\ (\min).$$

Графический анализ этой задачи показан на рис. 12, *а*. В данном случае область оказалась неограниченной и расположенной во II квадранте (так как условия неотрицательности на y_1 и y_2 не налагаются). Оптимальное решение $\bar{Y}^*=\left(\frac{13}{8},\ -\frac{1}{4}\right)$ и $T_{\min}=9$.

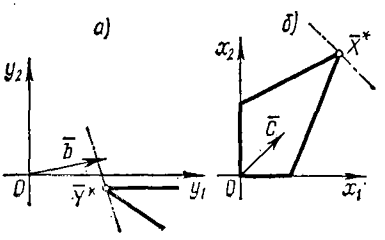

РИС. 12

Этим решением 3-е и 4-е неравенства удовлетворяются как строгие неравенства $\left[\frac{13}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}>1\right.$ и $\left.\frac{13}{8}+\left(-\frac{1}{4}=\frac{11}{8}>1\right]\right.$, следовательно, соответствующие им переменные x_3 и x_4 исходной задачи должны обращаться в нуль. Тогда из исходной системы получаем $4x_1=16$, откуда $x_1^*=4$, и $6x_1^*-4x_2^*=4$, откуда $x_2^*=5$. Следовательно, оптимальное решение исходной задачи (рис. 12, *б*) $\bar{X}^* = (4,\ 5,\ 0,\ 0)$. При этом $z_{\max} = 5\cdot4 + 5 - 16 = 9 = T_{\min}$, чем подтверждается правильность вычислений.

105. Найти оптимальные решения задач 94 (1—6) с помощью графического решения двойственных задач.

106. Дан вектор $\bar{X} = (3,\ 0,\ 1,\ 3)$. Определить, является ли он оптимальным решением следующих задач:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0\ (i = 1,\ \ldots,\ 4),$$

$$z = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4\ (\max);$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &= 11 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 0 \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= 13 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0\ (i = 1,\ \ldots,\ 4),$$

$$z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4\ (\max);$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= -3 \\ x_1 \qquad + 3x_4 &= 12 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0\ (i = 1,\ \ldots,\ 4),$$

$$z = x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4\ (\max);$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 &\leqslant 15 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &\geqslant -4 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\},$$

$$x_i \geqslant 0\ (i = 1,\ \ldots,\ 4),$$

$$z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4\ (\max).$$

Указание. Построить двойственную задачу и с помощью теоремы 2 определить ее решение. Затем проверить выполнение достаточного условия оптимальности $z(\bar{X}) = T(\bar{Y})$.

Третья теорема двойственности (теорема об оценках). *Значения переменных y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи численно равны частным производным $\frac{\partial z_{\max}}{\partial a_{i0}}$ для исходной задачи.*

Из этой теоремы, при малых изменениях Δa_{i0}, вытекает приближенное равенство

$$\Delta z \approx \bar{Y}^* \Delta \bar{a}_0 = \sum y_i^* \Delta a_{i0}.$$

При более значительных изменениях свободных членов можно лишь констатировать следующее оценочное неравенство:

$$\bar{Y}_1^* \Delta \bar{a}_0 \leqslant \Delta z_{\max} \leqslant \bar{Y}^* \Delta \bar{a}_0,$$

где Y_1^* — оптимальное решение двойственной задачи при изменённых значениях $\bar{a}_0 + \Delta\bar{a}_0$.

В случае, когда $Y_1^* = Y^*$, получаем точное равенство

$$\Delta z_{\max} = Y^* \Delta \bar{a}_0.$$

107. Для следующей задачи линейного программирования

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$

$$z = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 \text{ (min)}$$

определить пределы возможных изменений свободного члена $a_{10} = 1$, при которых изменение $z_{\min}$ может быть определено по точной формуле $\Delta z_{\min} = a_{01}^* \Delta a_{10}$.

Указание. Использовать графическую интерпретацию двойственной задачи.

108. Оценить изменение экстремального значения целевой функции при новом значении вектора ограничений a_0':

1) в задаче 103 (1) при $\bar{a}_0' = (4,\ 12,\ 2)$;

2) то же в задаче 103 (4) при $\bar{a}_0' = (6,\ 5;\ 3,\ 5)$;

3) то же в задаче 103 (7) при $\bar{a}_0' = (5,\ 5,\ 7)$.

§ 4. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

109. Для изготовления четырех видов продукции (А, Б, В и Г) используются три вида сырья (I, II и III). Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в следующей таблице:

Сырье	Нормы расхода				Ресурсы
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль	7,5	3	6	12	

1. Определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли.

2. Сформулировать экономически, записать и решить двойственную задачу.

3. Определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов: I на +40, II на —30, III на +50. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное влияние.

4. Определить нормы заменяемости ресурсов.

5. Сопоставить оценку затрат и прибыли по оптимальному плану и каждому виду продукции в отдельности.

6. Оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции Д, нормы затрат на единицу которого соответственно равны 2, 4, 2 и прибыль равна 15.

110. Предприятие должно выпустить три вида продукций (А, Б и В) в соотношении 1 : 2 : 3. При этом используются трудовые ресурсы, имеющиеся в наличии в количестве 200 ед., и часть произведенной продукции как внутрипроизводственное потребление.

В следующей таблице приведены данные о коэффициентах внутрипроизводственных затрат и затрат труда (см. гл. II) на производство единицы соответствующей продукции:

Ресурсы	Нормы затрат		
	А	Б	В
А	—	0,5	0,2
Б	—	—	0,2
Труд	2	3	1

1. Определить оптимальный план предприятия из условия максимизации конечной продукции.

2. Составить и истолковать экономически двойственную задачу.

3. Вычислить и сопоставить оценки единиц каждого из видов продукции и единицы трудовых ресурсов. Оценить с их помощью весь выпуск продукции предприятия по оптимальному плану.

4. Определить, на сколько изменится выпуск продук-

ции при увеличении трудовых ресурсов на 10 единиц; уменьшении на 5 единиц.

111. В следующей таблице указано количество изделий А и Б, которое может быть изготовлено из каждой единицы сырья одним из четырех технологических способов:

Изделия	Выход на единицу сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

1. Определить минимальное количество сырья, позволяющее изготовить 574 шт. изделий А и 328 шт. Б, и используемые при этом технологические способы.

2. Построить и сформулировать экономически двойственную задачу.

3. Определить оценки каждого вида изделий и единицы используемого сырья и оценить с их помощью каждый из четырех технологических способов.

4. Как изменились бы оценки изделий А и Б, если бы их необходимо было изготовить в количествах 600 и 394 шт. соответственно? Как изменилось бы при этом минимальное количество сырья?

5. Определить, как распределяются затраты сырья между изделиями А и Б.

6. В каком соотношении изменится количество изделий А и Б, если сохраняя общее минимальное количество сырья, изменить по сравнению с оптимальным планом количество сырья, обрабатываемого по II и III способам?

7. Целесообразна ли с точки зрения предприятия замена двух изделий А на три изделия Б? Как при этом изменится общее количество обрабатываемого сырья?

112. Каждое из двух предприятий (А и Б) может производить три вида изделий (I, II и III). В следующей таблице приведены данные о годовой производительности в тыс. шт. и затратах на единицу изделия в руб. при изготовлении только одного изделия (см. табл. на стр. 83).

1. Определить оптимальное распределение изделий по предприятиям (т. е. время работы каждого пред-

приятия по каждому из изделий) из условия максимизации числа комплектов, в каждый из которых изделия I, II и III входят в соотношении 1 : 2 : 2.

Предприятия	Производительность			Затраты		
	I	II	III	I	II	III
А	500	200	400	10	15	20
Б	250	300	150	12	16	8

2. Составить двойственную задачу и определить оценки каждого изделия и единицы рабочего времени каждого предприятия.

3. Определить, какую цену следует установить на каждое изделие, если цена комплекта равна 50 руб.

4. Показать, каким образом, руководствуясь этими ценами, можно определить оптимальное распределение производства.

113. В каждой из указанных ниже задач требуется:

а) составить двойственную задачу;

б) проверить взаимность двойственной пары;

в) решив исходную задачу симплексным методом, найти из таблицы решение двойственной задачи;

г) проверить справедливость равенства $BB^{-1} = E$, где матрица B включает столбцы коэффициентов исходной системы, вошедших в окончательный базис;

д) найти решение двойственной задачи, используя соотношение $\bar{Y}^* = \bar{C}_б^* B^{-1}$;

е) найти решение исходной задачи по найденному в пункте в) решению двойственной с помощью второй теоремы двойственности;

ж) привести графическую интерпретацию решений пары двойственных задач;

з) определить изменение экстремального значения целевой функции при увеличении a_{10} на 10%.

$$1)\ \left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 10 \end{aligned}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqslant 4 \\ 2x_1 - x_2 &\geqslant -4 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 10 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \qquad\qquad x_2 \geqslant 0,$$

$$z = 3x_1 + 2x_2\ (\max); \qquad z = 2x_1 + 3x_2\ (\min);$$

3) $$\left.\begin{aligned}-2x_1+x_2&\leqslant 4\\ x_1-2x_2&\leqslant 4\\ x_1+x_2&=10\end{aligned}\right\},$$
$x_1\geqslant 0$,
$z=3x_1+2x_2$ (max);

4) $$\left.\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3+x_4&=14\\ x_1-2x_2+x_3&=4\\ 2x_1-x_2&\geqslant -4\end{aligned}\right\},$$
$x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$,
$z=x_1+x_2$ (min);

5) $$\left.\begin{aligned}-2x_1+x_2&\geqslant 4\\ x_1+x_2&\leqslant 0\end{aligned}\right\},$$
$x_1\geqslant 0$,
$z=x_2$ (min);

6) $$\left.\begin{aligned}-x_1-x_2+x_3+x_4&=8\\ 3x_1-3x_2-x_3+x_4&=0\end{aligned}\right\},$$
$x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$,
$z=-x_1+x_2$ (min);

7) $$\left.\begin{aligned}-x_1+x_2-2x_3&=-1\\ -2x_1-2x_2&\geqslant -3\end{aligned}\right\},$$
$x_1\leqslant 0,\ x_2\geqslant 0$,
$z=-x_1+2x_2+3x_3$ (min).

114. В каждой из указанных ниже задач требуется:

а) составить двойственную задачу и проверить взаимность двойственной пары;

б) решив исходную задачу симплексным методом, сделать вывод о разрешимости двойственной задачи, подтвердив его графическим анализом обеих задач.

1) $$\left.\begin{aligned}-x_1+2x_2&\geqslant 6\\ 3x_1+5x_2&\leqslant 15\end{aligned}\right\},$$
$x_1\geqslant 0$,
$z=x_1-x_2$ (min);

2) $$\left.\begin{aligned}-x_1+2x_2&\leqslant 6\\ 3x_1+5x_2&\geqslant 15\end{aligned}\right\},$$
$x_2\geqslant 0$,
$z=x_1+2x_2$ (max);

3) $$\left.\begin{aligned}-2x_1+2x_2&\geqslant 3\\ x_1-x_2&\geqslant 1\end{aligned}\right\},$$
$z=x_1-3x_2$ (min);

4) $$\left.\begin{aligned}-x_1-4x_2+x_3+x_4&=23\\ 7x_1-6x_2-x_3+x_4&=7\end{aligned}\right\},$$
$x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$,
$z=-x_1+2x_2$ (max);

5) $$\left.\begin{aligned}-3x_1+2x_2&\leqslant 6\\ x_1-3x_2&\leqslant 3\end{aligned}\right\},$$
$x_2\geqslant 0$,
$z=x_1+2x_2$ (max);

6) $$\left.\begin{aligned}x_1-2x_2+2x_3+x_4&=-1\\ 2x_1-4x_2+x_3-x_4&=4\end{aligned}\right\},$$
$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$,
$z=x_1+3x_2-x_3-x_4$ (max).

ГЛАВА VI

Транспортные задачи

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ

115. Для транспортной задачи, исходные данные которой указаны в таблице

b_k a_i	20	40	30
70	3	5	8
80	6	3	2

,

1) составить математическую модель;

2) записать двойственную задачу, приняв u_i в качестве переменных, оценивающих ресурсы, и $-v_k$ в качестве переменных, оценивающих потребности.

Решение. 1) Вводим шесть переменных $x_{ik} \geqslant 0$, обозначающих количество единиц груза, доставляемых из i-го пункта отправления ($i = 1, 2$) в k-й пункт назначения ($k = 1, 2, 3$). Получим следующую математическую модель:

ограничения по ресурсам:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 70, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 80,$$

ограничения по потребностям:

$$x_{11} + x_{21} = 20, \quad x_{12} + x_{22} = 40, \quad x_{13} + x_{23} = 30,$$

условия неотрицательности:

$$x_{ik} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2; \ k = 1, 2, 3),$$

целевая функция

$$z = 3x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 6x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} \quad (\min).$$

Замечание. Ограничения по ресурсам записаны в форме неравенств, так как $\Sigma a_i = 150 > \Sigma b_k = 90$ и, следовательно, 60 избыточных единиц груза останутся в пунктах отправления.

2) Для составления двойственной задачи необходимо в исходной заменить z на $-z$, с целью приведения к задаче максимизации (см. гл. V, § 1). После этого, следуя правилу составления двойственной задачи и указанным в условии обозначениям двойственных переменных, получим двойственную задачу:

$$u_1-v_1\geqslant-3,\ u_1-v_2\geqslant-5,\ u_1-v_3\geqslant-8,\ u_2-v_1\geqslant-6,$$
$$u_2-v_2\geqslant-3,\ u_2-v_3\geqslant-2,$$
$$u_1\geqslant0,\ u_2\geqslant0 \text{ и } T=70u_1+80u_2-20v_1-40v_2-30v_3 \quad (\min).$$

116. Для транспортных задач, исходные данные которых указаны ниже, составить математическую модель и записать двойственную задачу:

1)

b_k a_i	80	140	110
100	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6

2)

b_k a_i	80	60	30	90
70	3	7	5	2
130	5	3	4	7

3)

b_k a_i	40	30	70	50
110	5	2	3	8
50	3	4	7	2
80	6	5	3	4

117. По указанным ниже данным о ресурсах a_i, потребностях b_k и матрице коэффициентов затрат $C=\|c_{ik}\|$ решить соответствующие транспортные задачи графически. Определить для каждой из задач допустимое решение, не прибегая к решению системы, и показать соответствующую ему точку на графике.

1) a_i: 40, 60, b_k: 20, 50, 30, $C=\begin{pmatrix}5&8&4\\7&3&6\end{pmatrix}$;

2) a_i: 30, 70, b_k: 20, 40, 40, $C=\begin{pmatrix}2&9&6\\5&4&4\end{pmatrix}$;

3) a_i: 80, 70, b_k: 60, 40, 50, $C=\begin{pmatrix}10&6&8\\5&4&7\end{pmatrix}$.

4) a_i: 40, 70, b_k: 30, 60, 20, $C=\begin{pmatrix}10 & 6 & 8\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$;

5) a_i: 25, 15, 60, b_k: 70, 30, $C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 5\\ 6 & 4 & 8\end{pmatrix}$;

6) a_i: 7, 3, 15, b_k: 12, 13, $C=\begin{pmatrix}7 & 4 & 8\\ 5 & 9 & 6\end{pmatrix}$.

Указание. Во всех задачах ранг системы ограничений $r = p + q - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$, число переменных $n = p \cdot q = 2 \cdot 3 = 6$, следовательно, число свободных переменных $n - r = 2$, что позволяет осуществлять графический анализ задач в плоскости двух свободных переменных.

Допустимое решение может быть определено по формуле

$$x_{ik} = \frac{a_i b_k}{\sum\limits_i a_i} \quad (i = 1,\ 2 \text{ и } k = 1,\ 2,\ 3).$$

Так, например, для задачи 1) получаем

$$x_{11} = \frac{a_1 b_1}{100} = 8;\ x_{12} = \frac{a_1 b_2}{100} = 20;\ x_{13} = \frac{a_1 b_3}{100} = 12,\ x_{21} = \frac{a_2 b_1}{100} = 12$$

и т. д.

118. Составить матрицу системы ограничений для закрытой модели транспортной задачи с тремя отправителями и тремя пунктами назначения. Проверить путем непосредственного определения ранга справедливость формулы $r = p + q - 1$.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ

119. Определить исходное опорное решение для следующей транспортной задачи, пользуясь правилами «северо-западного угла» и «минимального элемента», и сравнить значения линейной функции для найденных решений.

b_k a_i	30	70	20	60	40	30
100	7	3	8	4	5	2
60	5	7	3	8	4	6
40	3	8	4	2	6	9
50	1	6	7	5	3	4

Решение. I. «Правило северо-западного угла». Таблица заполняется, начиная с левого верхнего угла, куда помещаем $x_{11} = \min\{100, 30\} = 30$. В результате приходим как бы к новой таблице, в которой весь 1-й столбец исключен (ибо $b_1' = b_1 - x_{11} = 0$), а ресурсы, соответствующие 1-й строке, уменьшены на 30 ед. ($a_1' = a_1 - x_{11} = 70$). Далее процесс повторяется, начиная с клетки (1, 2), куда помещаем $x_{12} = \min\{70, 70\} = 70$.

Теперь возникает осложнение, так как указанное число 70 заставляет исключить из дальнейшего одновременно и 1-ю строку ($a_1'' = a_1' - x_{12} = 0$), и 2-й столбец ($b_2' = b_2 - x_{12} = 0$). В этом случае число нулевых элементов в матрице $X = \| x_{ik} \|$ окажется на единицу больше, чем число свободных переменных $n - r$, т. е. будет получено вырожденное решение. Чтобы последующие этапы решения транспортной задачи не нарушились, необходимо в таблицу внести число 0, соответствующее значению базисной переменной. Это число заносится в соседнюю с последней занятой по строке или столбцу клетку, причем в ту из них, которой соответствует наименьшее значение коэффициента затрат. В рассмотренном примере клетке (1, 3) соответствует $c_{13} = 8$, а клетке (2, 2) — значение $c_{22} = 7$. Поэтому заносим в клетку (2, 2) число $x_{22} = 0$.

После этого шага получаем $a_2' = a_2 - x_{22} = 60$ и $b_2'' = b_2' - x_{22} = 0$. Следовательно, подлежит заполнению клетка (2, 3), куда вносится $x_{23} = \min\{a_2', b_3\} = \min\{60, 20\} = 20$. На этом шаге исключается 3-й столбец ($b_3' = b_3 - x_{23} = 0$), но остается 2-я строка ($a_2'' = a_2' - 20 = 60 - 20 = 40$), поэтому заполняется следующая по этой строке клетка (2, 4) и т. д. После выполнения $r = p + q - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$ шагов приходим к следующему исходному опорному решению:

$$X_0' = \begin{pmatrix} 30 & 70 & . & . & . & . \\ . & 0 & 20 & 40 & . & . \\ . & . & . & 20 & 20 & . \\ . & . & . & . & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

которому соответствует значение линейной функции

$$z_0' = 30 \cdot 7 + 70 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 8 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 = 1140.$$

Замечание. При выполнении расчетов целесообразно после каждого шага записывать справа и внизу таблицы соответствующие остатки ресурсов a_i', a_i'', ... и потребностей b_k', b_k'', ...

II. Правило «минимального элемента». Просматривая элементы матрицы затрат, находим наименьший элемент $c_{41} = 1$. Поэтому принимаем $x_{41} = \min\{50, 30\} = 30$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения 1-й столбец, так как $b_1' = b_1 - 30 = 0$. После этого шага получим матрицу C_1, отличающуюся от C отсутствием элементов исключенного столбца:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & \boxed{2} & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Снова находим в матрице C_1 наименьший элемент $c_{34} = 2$. Следовательно, $x_{34} = \min\{40, 60\} = 40$. Теперь исключается из дальнейшего рассмотрения 3-я строка, а в оставшейся матрице

$$C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 5 & \boxed{2} \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

находим минимальный элемент $c_{16} = 2$. Поэтому принимаем $x_{16} = \min\{100, 30\} = 30$ и исключаем 6-й столбец. Новый минимальный элемент $c_{12} = 3$, следовательно, $x_{12} = \min\{70, 70\} = 70$ (так как в 1-й строке остались нераспределенными $a_1' = a_1 - x_{16} = 100 - 30 = 70$).

Поскольку на этом шаге сразу исключается 1-я строка и 2-й столбец, необходимо ввести $x_{14} = 0$ (вырожденное решение). Следующий минимальный элемент $c_{23} = 3$, откуда $x_{23} = \min\{60, 20\} = 20$.

После исключения 3-го столбца в матрице $\| c_{ik} \|$ остались только 4-й и 5-й столбцы без элементов, находящихся в 1-й и 3-й строках. В этой матрице минимальным оказался элемент $c_{15} = 3$, откуда $x_{45} = \min\{20, 40\} = 20$.

На следующем шаге выбираем минимальный элемент $c_{25} = 4$, откуда $x_{25} = \min\{40, 20\} = 20$. Наконец, на последнем шаге заносим в единственную невычеркнутую клетку $x_{24} = 20$.

Итак, получили новое исходное опорное решение

$$X_0'' = \begin{pmatrix} . & 70 & . & 0 & . & 30 \\ . & . & 20 & 20 & 20 & . \\ . & . & . & 40 & . & . \\ 30 & . & . & . & 20 & . \end{pmatrix}$$

и соответствующее значение функции $z_0'' = 740$.

Как видим, в найденных решениях ровно девять переменных являются базисными (соответствуют занятым клеткам). Это отвечает рангу матрицы $r = p + q - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$. При этом менее выгодным оказалось исходное опорное решение X_0', построенное по правилу «северо-западного угла» ($z_0' = 1140$ оказалось больше, чем $z_0'' = 740$).

Как правило, так будет всегда, поскольку при построении X_0' мы совершенно не учитываем коэффициентов c_{ik}. Естественно, что при этом для достижения минимума в процессе дальнейшего решения задачи потребуется больше итераций. Однако при некотором виде матрицы затрат $\| c_{ik} \|$ опорное решение, построенное по первому правилу, может оказаться «лучше» (т. е. ему будет отвечать меньшее значение функции z).

120. Определить по указанным в предыдущей задаче правилам исходные опорные решения и соответствующие им значения функции для транспортных задач, условия которых представлены в следующих таблицах:

1)

b_k a_i	10	11	8	6
12	10	3	5	8
5	5	7	6	4
18	1	4	3	7

;

2)

b_k a_i	70	40	30	60	50
20	4	2	5	7	6
110	7	8	3	4	5
120	2	1	4	3	2

;

3)

b_k a_i	30	90	80	20	30
120	2	8	4	6	3
30	3	2	5	2	6
40	6	5	8	7	4
60	3	4	4	2	1

;

4)

b_k a_i	110	50	30	80	100	90
130	2	3	6	8	2	10
90	8	1	2	3	5	6
100	7	4	4	1	4	8
140	2	8	5	1	3	6

.

§ 3. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД

121. Построить для исходного опорного решения X_0', полученного в задаче 120 (4), цикл, начинающийся в свободной клетке (4, 1).

122. Для исходного опорного решения

$$X_0=\begin{pmatrix} 20 & 40 & 0 & . \\ . & . & 10 & 20 \\ . & . & . & 50 \end{pmatrix}$$

транспортной задачи образовать цикл, начинающийся в клетке (3, 1). Показать, что совокупность векторов $\bar{p}_{ik}$, соответствующих клеткам этого цикла, является линейно зависимой.

123. Для заданных опорных решений выполнить преобразование однократного замещения с введением в базис переменной x_{21}, используя для этого перемещение по циклу и алгоритм симплексных преобразований:

$$1)\ X=\begin{pmatrix} 25 & 35 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ X=\begin{pmatrix} 25 & 15 & 0 \\ 0 & 35 & 25 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

124. Решить транспортную задачу со следующим исходным опорным решением и матрицей затрат:

$$X_0=\begin{pmatrix}15 & 45 & 0\\ 10 & 0 & 20\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6 & 8 & 2\\ 3 & 5 & 10\end{pmatrix},$$

пользуясь распределительным и общим симплексным методами. Сравнить оценки свободных клеток, полученные в ходе решения задачи указанными двумя методами.

Решение. I. Распределительный метод. Построим для двух свободных клеток (1, 3) и (2, 2) в решении X_0 циклы и вычислим с их помощью оценки Δ_{13} и Δ_{22} по формуле $\Delta_{st}=$ $=\sum_{н} c_{ik}-\sum_{ч} c_{ik}$;

$$\Delta_{13}=(2+3)-(6+10)=-11,$$
$$\Delta_{22}=(5+6)-(8+3)=0.$$

Поскольку первая оценка оказалась отрицательной, то производим перемещение по циклу (1, 3), (1, 1,), (2, 1), (2, 3) числа $\lambda=$ $=\min\{15, 20\}=15$. В результате приходим к следующему решению:

a_i \ b_k	25	45	20
60	6 15	8 45	2 ●
30	3 10	5	10 20

a_i \ b_k	25	45	20
60	6	8 45	2 15
30	3 25	5 ●	10 5

В новом решении следует оценить лишь клетку (2, 2). Получим

$$\Delta'_{22}=(5+2)-(8+10)=-11.$$

Поэтому производим по указанному в таблице циклу перемещение числа $\lambda=\min\{5, 45\}=5$. Получим

a_i \ b_k	25	45	20
60	6 ●	3 40	2 20
30	3 25	5 5	10

Наконец, в этой таблице оценка клетки (1, 1) составляет

$$\Delta''_{11} = (6+5) - (3+8) = 0.$$

Следовательно, последнее решение является оптимальным.

II. Симплексный метод. В исходную симплексную таблицу внесем систему, приведенную к опорному решению X_0. Для этого систему уравнений задачи решим относительно базисных переменных x_{11}, x_{12}, x_{21} и x_{23}.

c_{ik}	Баз. перем.		6	8	2	3	5	10	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
3	x_{21}	10	0	0	−1	1	1	0	
6	x_{11}	15	1	0	$\boxed{1}$	0	−1	0	15
8	x_{12}	45	0	1	0	0	1	0	
10	x_{23}	20	0	0	1	0	0	1	20
	z	680	0	0	11	0	0	0	
3	x_{21}	25	1	0	0	1	0	0	
2	x_{13}	15	1	0	1	0	−1	0	
8	x_{12}	45	0	1	0	0	1	0	45
10	x_{23}	5	−1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	5
	z	515	−11	0	0	0	11	0	
3	x_{21}	25	1	0	0	1	0	0	
2	x_{13}	20	0	0	1	0	0	1	
8	x_{12}	40	1	1	0	0	0	−1	
5	x_{22}	5	−1	0	0	0	1	1	
	z	435	0	0	0	0	0	−11	

После II итерации в индексной строке получили неположительные оценки $a_{01} = 0$ и $a_{06} = -11$. Так как задача заключалась в минимизации функции z, то, следовательно, достигнуто оптимальное решение

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (0,\ 40,\ 20,\ 25,\ 5,\ 0) \text{ и } z_{\min} = 435,$$

которое представляет собой лишь иную (векторную) форму записи найденного выше оптимального решения.

Заметим, что оба метода приводят также к одному и тому же промежуточному опорному решению

$$X_2 = (0,\ 45,\ 15,\ 25,\ 0,\ 5).$$

При сравнении оценок свободных переменных (свободных клеток) необходимо учесть, что они входят в соответствующие формулы для расчета изменения функции z с противоположными знаками. Так, в симплексном методе мы исходили из формулы $\Delta z = -a_{0k}\lambda$, где $\lambda = \frac{a_{gk}}{a_{gp}}$ — значение, принимаемое переменной x_k при переходе в базис. Аналогичная формула в распределительном методе записывалась в виде $\Delta z = \Delta_{st}\lambda$.

Таким образом, если индекс k в симплексных таблицах соответствует переменной x_{st}, фигурирующей в распределительном методе, то $a_{0k} = -\Delta_{st}$.

Так, после I итерации распределительного метода имеем $\Delta_{13} = -11$ и $\Delta_{22} = 0$, соответственно в 1-й симплексной таблице находим $a_{03} = 11$ и $a_{05} = 0$; после II итерации имеем $\Delta'_{11} = (6 + 10) - (3 + 2) = 11$ и $\Delta'_{22} = -11$, что соответствует оценкам во 2-й симплексной таблице $a'_{01} = -11$ и $a'_{05} = 11$; наконец, для оптимального решения в том и другом методе имеем $\Delta''_{11} = (6 + 5) - (8 + 3) = 0$, $\Delta''_{23} = (10 + 8) - (2 + 5) = 11$ и, соответственно, $a''_{01} = 0$, $a''_{06} = -11$.

125. Решить следующие транспортные задачи распределительным и симплексным методами и провести сопоставление этих двух методов решения:

1)

b_k a_i	10	35	20
40	7	2	4
25	3	8	9

2)

b_k a_i	40	90
70	7	4
45	5	9
15	3	8

3)

b_k a_i	20	70	10
40	6	4	2
60	3	5	7

126. Решить следующие транспортные задачи распределительным методом: 1) 116 (1); 2) 117 (1); 3) 117 (3); 4) 120 (1); 5) 120 (2); 6) 120 (3); 7) 120 (4).

127. Доказать, что число клеток, образующих цикл, всегда четно.

§ 4. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

128. Найти систему потенциалов u_i и v_k, где $i = 1, \ldots, p$ и $k = 1, 2, \ldots, q$ для опорного решения, указанного в следующей таблице:

b_k / a_i		15	40	25	20	u_i
	30	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$u_1=0$
	60	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 25	$\boxed{3}$ 25	$\boxed{9}$ 10	$u_2=-2$
	10	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 10	$u_3=4$
v_k		$v_1=7$	$v_2=3$	$v_3=1$	$v_4=7$	

Решение. Согласно определению, числа u_i и v_k должны удовлетворять $r = p + q - 1$ равенствам:

$$c_{ik}+u_i-v_k=0,$$

где c_{ik} — коэффициенты затрат, соответствующие занятым данным решением клеткам, т. е. базисным переменным x_{ik} в данном опорном решении. Применительно к рассматриваемому примеру получим следующие шесть уравнений для определения неизвестных u_i и v_k:

$$7+u_1-v_1=0; \qquad 3+u_2-v_3=0.$$
$$3+u_1-v_2=0; \qquad 9+u_2-v_4=0.$$
$$5+u_2-v_2=0; \qquad 3+u_3-v_4=0.$$

Поскольку число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, одно неизвестное всегда оказывается свободным и ему можно приписать любое числовое значение. Положим $u_1 = 0$, тогда из 1-го уравнения получаем $v_1 = 7$ и из 2-го $v_2 = 3$. Из 3-го уравнения, подставляя $v_2 = 3$, находим $u_2 = -2$ и, далее, из 4-го и 5-го уравнений $v_3 = 1$ и $v_4 = 7$. Наконец, из последнего уравнения получаем $u_3 = 4$. Найденные значения потенциалов указаны в последнем столбце и последней строке таблицы.

129. Доказать, что при заданном значении одного из потенциалов (например, u_1) все остальные u_i и v_k определяются из уравнений

$$c_{ik}+u_i-v_k=0 \qquad (*)$$

однозначно, причем разности $v_k - u_i$ для любых i и k не зависят от выбранного значения u_1.

130. Проверить справедливость утверждения предыдущей задачи, определив систему потенциалов по данным задачи 128, задаваясь значениями $u_1 = 5$; $u_1 = -1$; $v_1 = 0$ и $v_1 = 3$.

Определить с помощью найденной системы потенциалов оценки Δ_{st} свободных клеток в исходной таблице.

131. Определить систему потенциалов u_i и v_k и рассчитать оценки Δ_{st} всех свободных клеток для указанного в таблице опорного решения.

1)

a_i \ b_k	10	40	20	60	20
30	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 20
70	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$ 40	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{3}$
50	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{4}$

2)

a_i \ b_k	25	15	40	10	20	40
20	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$ 20
90	$\boxed{2}$ 25	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{8}$ 20	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{9}$
40	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 20	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{2}$ 20

132. Построить опорное решение по заданным в таблице значениям потенциалов.

a_i \ b_k	45	15	20	20	u_i
25	$\boxed{9}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	−9
55	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{2}$	−6
20	$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	−3
v_k	0	−3	−6	−4	

133. С помощью метода потенциалов решить транспортную задачу, данные которой приведены в предыдущей таблице.

Решение. Начинаем с подготовительного этапа — построения исходного опорного решения X_0 и вычисления для этого решения оценочной матрицы $C^0 = \| c_{ik} + u_i - v_k \|$.

При построении X^0 воспользуемся правилом минимального элемента. Для построения исходной системы потенциалов прежде всего подчеркнем элементы матрицы затрат, соответствующие базисным переменным (занятым клеткам) в решении X^0:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 5 & \cdot & 20 & \cdot \\ 20 & 15 & \cdot & 20 \\ 20 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} \underline{9} & 5 & \underline{3} & 10 \\ \underline{6} & \underline{3} & 8 & \underline{2} \\ \underline{3} & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 3 & 5 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 6 \\ v_k \diagdown u_i \end{array}$$

Теперь, прибавляя к строкам и вычитая из столбцов таблицы величины u_i и v_k, добьемся того, чтобы все подчеркнутые элементы обратились в нуль *. Положим $u_1 = 0$ и соответственно $v_1 = 9$, тогда $c^0_{11} = 9 + 0 - 9 = 0$. Далее, прибавляя ко 2-й строке $u_2 = 3$, получим $c^0_{21} = 6 + 3 - 9 = 0$. Так как подчеркнутый элемент $c_{31} = 3$ оказался теперь равным $3 - 9 = -6$, то добавим к 3-й строке $u_3 = 6$, чтобы получить $c^0_{31} = 3 - 9 + 6 = 0$. Далее, вычитая из 2-го столбца $v_2 = 6$, из 3-го столбца $v_3 = 3$ и из 4-го столбца $v_4 = 5$, превратим в нули элементы c^0_{22}, c^0_{13}, c^0_{24}.

Таким образом, мы определили систему потенциалов

$$u_1 = 0,\ u_2 = 3,\ u_3 = 6,\ v_1 = 9,\ v_2 = 6,\ v_3 = 3 \text{ и } v_4 = 5.$$

В результате выполнения указанных эквивалентных преобразований получим оценочную матрицу

$$C^0 = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \boxed{-1} & \underline{0} & 5 \\ \underline{0} & \underline{0} & 8 & \underline{0} \\ \underline{0} & 8 & 7 & 9 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc} & & 1 & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} +1 \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

На этом заканчивается предварительный этап. Переходим к выполнению последовательных итераций метода потенциалов, связанных с преобразованием двух видов матриц X и C.

I шаг. В оценочной матрице C^0 находим отрицательный элемент —1 (если бы отрицательного элемента не оказалось, то решение X^0 было бы оптимальным). Свободная клетка, соответствующая этому элементу, подлежит замещению.

II шаг. В решении X^0 строим цикл, начинающийся с клетки

---

* Нетрудно видеть, что для найденного исходного опорного решения могла бы быть использована система потенциалов, указанная в задаче 132. Эта система отличается от найденной ниже на постоянное слагаемое 9.

(1, 2), и производим перемещение числа $\lambda_1 = \min\{5, 15\} = 5$. В результате получаем новое решение

$$X' = \begin{pmatrix} . & 5 & 20 & . \\ 25 & 10 & . & 20 \\ 20 & . & . & . \end{pmatrix}.$$

III шаг. Подчеркиваем в матрице C^0 элементы, соответствующие занятым в решении X' клеткам. При этом всегда подчеркиваются нули и один ненулевой элемент c'_{st}, выделенный на I шаге. Соединим этот ненулевой элемент цепочкой с подчеркнутыми нулями в той же строке, а затем последние с подчеркнутыми нулями по столбцам и т. д. В данном случае соединяем $c^0_{12} = -1$ только с элементом $c^0_{13} = 0$. Строки и столбцы, подчеркнутые нули которых вошли в состав цепочки, назовем *выделенными*. Прибавив ко всем выделенным строкам и вычитая из выделенных столбцов число $|c^0_{st}|$, получим новую матрицу C, у которой на всех подчеркнутых местах окажутся нулевые элементы. Следовательно, эта матрица будет оценочной для решения X'.

Так, в рассматриваемом примере $c^0_{st} = c^0_{12} = -1$. Прибавляя к 1-й строке и вычитая из 3-го столбца $|c^0_{st}| = 1$, получим новую матрицу

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

На этом заканчивается одна итерация, а в данном случае и весь процесс расчета, так как в матрице C' не оказалось отрицательных элементов. Следовательно, опорное решение X', найденное на II шаге, есть оптимальное решение задачи. Ему соответствует $z_{\min} = 365$.

134. При решении транспортной задачи получено следующее оптимальное решение $X_{\text{опт}}$ и соответствующая ему оценочная матрица C':

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & 5 & 0 \\ 7 & \underline{0} & 0 & \underline{0} \end{pmatrix}.$$

Определить общее оптимальное решение.

Решение. В оценочной матрице оказались нулевые оценки для некоторых из свободных переменных. Так, подчеркнув в матрице C элементы, соответствующие занятым клеткам, устанавливаем наличие двух неподчеркнутых нулей $c'_{24} = 0$, $c'_{33} = 0$. Это говорит о том, что задача имеет альтернативный оптимум. Для отыскания общего оптимального решения прежде всего необходимо по этим неподчеркнутым нулям, как по отрицательным оценкам, перейти к следующему новому оптимальному решению.

Так, выделив элемент $c'_{24} = 0$ (I шаг), производим в решении $X_{\text{опт}}$ перемещение по циклу с замещением клетки (2, 4). Получим

$\lambda = \min\{3, 10\} = 3$, откуда находим второе оптимальное решение

$$X'_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выделив элемент $c'_{33} = 0$ и перемещая по циклу число $\lambda = \min\{3, 8\} = 3$, придем к третьему опорному оптимальному решению

$$X''_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь, пользуясь теоремой об альтернативном оптимуме, запишем общее оптимальное решение в виде

$$X = t_1 X_{\text{опт}} + t_2 X'_{\text{опт}} + t_3 X''_{\text{опт}},$$

где

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1 \text{ и } t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

Подставляя найденные выше решения и выполнив действия над матрицами, получим

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8t_1 + 8t_2 + 5t_3 & 2t_1 + 2t_2 + 5t_3 \\ 5 & 10t_1 + 7t_2 + 10t_3 & 0 & 3t_2 \\ 0 & 5t_1 + 8t_2 + 5t_3 & 3t_3 & 3t_1 \end{pmatrix}.$$

Задаваясь любыми значениями t_1, t_2, t_3, при сохранении условий $t_i \geqslant 0$ и $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ будем получать различные оптимальные решения, а среди них и указанные выше опорные оптимальные решения.

135. Решить методом потенциалов следующие транспортные задачи: 1) 114 (1); 2) 117 (4); 3) 117 (5); 4) 117 (6); 5) 120 (1); 6) 120 (2); 7) 120 (3); 8) 120 (4).

136. Определить, на сколько изменятся затраты на перевозки по сравнению с затратами по оптимальному плану задачи 133, если ресурсы 3-го поставщика и потребности 3-го потребителя увеличатся на 2 ед.

Решение. Изменение величины $z_{\min}$, вызванное изменением ресурсов (Δa_i) и потребностей (Δb_k), можно определить по формуле

$$\Delta z_{\min} = v_k \Delta b_k + u_i \Delta a_i,$$

где u_i и v_k — соответственно потенциалы i-го поставщика и k-го потребителя относительно оптимального решения.

Если модель задачи после указанных изменений остается закрытой, то

$$\Delta b_k = \Delta a_i = \Delta \quad \text{и} \quad \Delta z_{\min} = (v_k - u_i)\,\Delta.$$

Так как при решении задачи 133 мы не находили непосредственно значений потенциалов для оптимального решения, то воспользуемся элементами c'_{ik} последней оценочной матрицы. Из равенства

$$c'_{ik} = c_{ik} + u_i - v_k$$

получаем

$$v_k - u_i = c_{ik} - c'_{ik},$$

откуда

$$\Delta z_{\min} = (c_{ik} - c'_{ik})\,\Delta.$$

Подставляя в последнюю формулу $c_{33} = 4$, $c'_{33} = 6$ и $\Delta = 2$, получим $\Delta z_{\min} = -4$.

Результат несколько неожиданный, так как увеличение объема перевозок оказалось приводит не к увеличению, а даже к уменьшению затрат.

Это связано с тем, что указанные изменения a_3 и b_3 вызывают перераспределение перевозок. Действительно, измененным данным соответствует следующее оптимальное решение:

a_i \ b_k	45	15	22	20
25	9	5 3	3 22	10
55	6 23	3 12	8	2 20
22	3 22	8	4	7

; $z_{\min} = 361$.

$u_1 = 1$

-1

-2

Как видим, суммарные затраты уменьшились с 365 до 361.

137. Определить, на сколько изменятся минимальные затраты в транспортной задаче 120 (4), если в исходные данные ввести следующие изменения: 1) увеличить a_2 и b_2 на 1; 2) увеличить a_3 на 2, b_1 и b_2 на 1; 3) a_3 и b_3 уменьшить на 3; 4) увеличить a_2 на 5, b_3 на 2 и b_4 на 3.

138. В следующей таблице приведены: объем производства каждого из трех заводов (a_i), потребности четырех потребителей (b_k) и затраты c_{ik} на транспортировку 1 ед. продукции в тыс. руб.

a_i \ b_k	30	95	25	60
70	5	3	8	4
90	6	6	3	2
50	3	4	6	9

Определить:

1) на сколько вырастут суммарные затраты на перевозку, если потребности 3-го потребителя и объем производства 3-го завода возрастут на 5 ед.;

2) изменение затрат, если a_1 и b_4 увеличатся на 5 ед;

3) на каком из заводов выгоднее увеличить объем производства, если потребности 4-го потребителя возрастут на 20 ед., а затраты, связанные с расширением производства, на всех заводах останутся теми же.

139. Как изменится оптимальное решение, найденное в предыдущей задаче, если величина a_1 увеличится на 1, и на сколько при этом изменятся суммарные затраты? У какого поставщика выгоднее оставить избыточную единицу ресурсов?

140. По исходным данным задачи 138 установить, на каком из трех заводов следует расширить производство для удовлетворения возросших на 10 ед. потребностей 1-го потребителя, если дополнительные затраты, вызванные расширением производства, для всех заводов различны и составляют соответственно 10, 6 и 7 ед. на 1 ед. продукции.

141. Установить, является ли оптимальным план X при данной матрице затрат C:

$$X=\begin{pmatrix}17 & 15 & 0\\ 0 & 10 & 6\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}7 & 5 & 9\\ 10 & 8 & 6\\ 15 & 12 & 10\end{pmatrix}.$$

142. Доказать, что если система потенциалов удовлетворяет условиям:

1) для всех $x_{ik}>0$ $v_k-u_i=c_{ik}$;

2) для всех $x_{ik}=0$ $v_k-u_i\leqslant c_{ik}$,

то соответствующий план оптимальный.

§ 5. ОТКРЫТЫЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

143. Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в следующей таблице:

b_k / a_i	20	45	30	55
74	7	3	6	0
40	4	8	2	0
36	1	5	9	0

Решение. Объем ресурсов $74+40+36=150$ превышает объем потребностей $20+45+30=95$ на 55 ед., следовательно, модель задачи открытая. Вводя дополнительный (балансовый) пункт назначения с объемом потребностей $b_4=55$ и значениями затрат $c_{14}=c_{24}=c_{34}=0$, получаем закрытую модель задачи, которая исследуется ранее указанными методами. В результате приходим к оптимальному решению

$$X=\begin{pmatrix} . & 45 & . & 30 \\ . & . & 30 & 10 \\ 20 & . & . & 15 \end{pmatrix},$$

согласно которому избыток ресурсов в количестве 55 ед., условно доставляемый «балансовому» потребителю, в действительности оставляется у 1-го поставщика в количестве 30 ед., у 2-го — 15 ед., и у 3-го — 15 ед. Затраты на перевозки составят $z_{\min}=215$.

144. Найти оптимальный план перевозок по данным задачи 143 при дополнительном условии обязательного вывоза всех ресурсов, имеющихся у 2-го поставщика. Составить математическую модель задачи и решить ту же задачу симплексным методом.

Решение. Для решения задачи методом блокирования вводим в клетку (2, 4) балансового столбца произвольно большие затраты $c_{24}=M$. Дальнейшее решение задачи проводится обычным образом.

Предварительный этап. а) Строим исходное опорное решение:

$$X^0=\begin{pmatrix} . & 20 & & 55 \\ . & 10 & 30 & . \\ 20 & 15 & & * \end{pmatrix}.$$

б) Находим для него оценочную матрицу:

$$C=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 7 & \underline{3} & 6 & \underline{0} \\ 4 & \underline{8} & \underline{2} & M \\ \underline{1} & \underline{5} & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ -5 \\ -2 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} -1 & 3 & -3 & 0 & v_k \backslash u_l \end{array} \end{array} \rightarrow C^0=\begin{pmatrix} 8 & \underline{0} & 9 & \underline{0} \\ 0 & \underline{0} & \underline{0} & M-5 \\ \underline{0} & 0 & 10 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \end{array}$$

I шаг. Выделяем отрицательный элемент $c^0_{34}=-2$.

II шаг. Производим в решении X^0 перемещение по циклу $\lambda'=\min\{15, 55\}=15$, в результате чего получаем новое решение X':

$$X^0=\begin{pmatrix} . & 20 & & 55 \\ . & 10 & 30 & . \\ 20 & 15 & & * \end{pmatrix} \lambda'=15 \quad \rightarrow X'=\begin{pmatrix} & 35 & & 40 \\ * & 10 & 30 & . \\ 20 & & & 15 \end{pmatrix}$$

III шаг. Вычисляем новую оценочную матрицу C':

$$C'=\begin{pmatrix} 6 & \underline{0} & 9 & \underline{0} \\ \boxed{-2} & 0 & \underline{0} & M-5 \\ \overline{0} & 2 & \overline{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \\ \\ \end{matrix} .$$
$$\qquad\qquad 2$$

Следующую итерацию снова начинаем с I шага — выделения отрицательного элемента $c'_{21} = -2$. Перемещение по циклу, построенному для решения X', числа $\lambda_2 = \min\{10, 40, 20\} = 10$ приводит к решению X'':

$$X''=\begin{pmatrix} . & 45 & . & 30 \\ 10 & . & 30 & . \\ 10 & . & . & 25 \end{pmatrix}; \qquad C''=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & M-3 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая ему оценочная матрица C'' не имеет отрицательных элементов, следовательно, решение X'' является оптимальным. Оно удовлетворяет дополнительному условию $x_{24} = 0$.

Для решения той же задачи симплексным методом составим прежде всего ее математическую модель:

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13} &\leqslant 75 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &= 40 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} &\leqslant 35 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 20 \\ x_{12}+x_{22} &= 45 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 30 \end{aligned}\right\}; \quad \begin{aligned} x_{ik} &\geqslant 0 \\ (i &= 1,\ 2,\ 3; \\ k &= 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}$$

2-е ограничение записано в виде уравнения, на основании дополнительного условия, а 1-е и 3-е — в виде неравенств, так как имеется избыток ресурсов над потребностями.

Введем в 1-е и 3-е неравенства балансовые переменные x_{14} и x_{34} и приведем систему ограничений к единичному базису. После четырех итераций метода последовательных исключений придем к следующей системе ограничений:

$$\left.\begin{array}{lllr} \underline{\underline{x_{14}}} & & -x_{31}-x_{32}-x_{33} & =20 \\ -x_{11} & +\underline{\underline{x_{22}}}+x_{23}-x_{31} & & =20 \\ & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+\underline{\underline{x_{34}}} & =35 \\ x_{11} & +\underline{\underline{x_{21}}} & +x_{31} & =20 \\ x_{11}+\underline{\underline{x_{12}}} & & -x_{23}+x_{31}+x_{32} & =25 \\ \underline{\underline{x_{13}}} & & +x_{23} \qquad +x_{33} & =30 \end{array}\right\},$$

$$z=7x_{11}+3x_{12}+6x_{13}+4x_{21}+8x_{22}+2x_{23}+x_{31}+5x_{32}+9x_{33}\ (\min).$$

Теперь можно перейти к заполнению исходной симплексной таблицы и выполнению последовательных итераций симплексного метода.

c_i	Баз. перем.		7	3	6		4	8	2	1	5	9	
		a_{i0}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
	x_{14}	20				1				−1	−1	−1	
8	x_{32}	20	−1					1	1	−1			
	x_{34}	35								1	1	1	1
4	x_{21}	20	1				1			1			
3	x_{12}	25	1	1					−1	1	1		
6	x_{13}	30			1				1			1	
	z	495	−8						9	−2	−2	−3	
	x_{14}	20				1				−1	−1	−1	
2	x_{23}	20	−1					1	1	−1			
	x_{34}	35								1	1	1	1
4	x_{21}	20	1				1			1			
3	x_{12}	45		1				1			1		
6	x_{13}	10	1					−1		1		1	
......	z	315	1					−9		7	−2	−3	
...	......	....	.....	...	...	...	...	......	....	....	.....	.....	
....	z	245	−6					−2			−2	−10	

После II итерации получаем оптимальное решение: $x_{14} = 30$; $x_{23} = 30$; $x_{34} = 25$; $x_{21} = 10$; $x_{12} = 45$; $x_{31} = 10$ (остальные $x_{ik} = 0$), совпадающее с ранее найденным решением X''. Для упрощения расчетов на II итерации производился расчет только элементов столбца свободных членов и индексной строки. Все оценки этой строки после умножения на —1 совпадают с ранее найденными в матрице C''.

145. Решить следующие транспортные задачи:

1)

b_k a_i	40	35	30	45
46	4	3	2	7
34	1	1	6	4
40	3	5	9	4

;

2)

b_k a_i	40	30	20	50
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
50	8	4	2	5

;

3)

b_k a_i	16	18	12	15
20	2	3	9	7
16	3	4	6	1
14	5	1	2	2
22	4	5	8	1

;

4)

b_k a_i	10	35	15	25	55	10
30	3	7	1	5	4	9
5	7	5	8	6	3	4
45	6	4	8	3	2	5
40	3	1	7	4	2	3

.

146. Решить задачи 145 (1—4) при следующих дополнительных условиях:

1) 145 (1) — 1-й пункт потребления должен быть удовлетворен полностью;

2) 145 (2) — из 3-го пункта назначения груз должен быть вывезен полностью;

3) 145 (3) — 1-й и 4-й пункты отправления должны быть полностью разгружены;

4) 145 (4) — 4-й и 6-й потребители должны быть удовлетворены полностью.

147. Найти оптимальный план перевозки неоднородного груза двух взаимозаменяемых сортов из двух пунктов отправления A_1 и A_2 в два пункта назначения B_1 и B_2.

Ресурсы составляют: в п. A_1 — 200 ед. I с., 300 ед. II с. и в п. A_2 — 120 ед. I с. и 80 ед. II с. Потребности составляют: в п. B_1 — 150 ед. I с., 100 ед. II с. и в п. B_2 — 120 ед. I с., 200 ед. II с. Затраты на перевозку единицы груза заданы в таблице:

	B_1	B_2
A_1	6	10
A_2	8	4

.

При расчете исходить из коэффициента взаимозаменяемости I с. на II с., равным 2 (т. е. 2 ед. II с. заменяют 1 ед. I с.).

Р е ш е н и е. Прежде всего пересчитываем все данные таблицы в единицы II с.; получим

$$a_{11} = 200\ \text{Ic}_2 = 200 \cdot 2 = 400\ \text{IIc.};\quad a_{21} = 120\ \text{Ic.} = 240\ \text{IIc.}$$

Аналогично

$$b_{11} = 150\ \text{Ic.} = 150 \cdot 2 = 300\ \text{IIc.};\quad b_{21} = 120\ \text{Ic.} = 240\ \text{IIc.}$$

В связи с пересчетом ресурсов и потребностей, относящихся к грузу I с., в условные единицы груза II с. необходимо изменить в обратном отношении коэффициенты затрат на перевозки этого груза. В результате приходим к следующей таблице, все данные которой выражены в единицах груза II с.:

a_i \ b_k	300	100	240	200	180
400	3	M	5	M	0
300	M	6	M	10	0
240	4	M	2	M	0
80	M	8	M	4	0

В связи с тем, что в 1-м и 3-м столбцах указаны потребности только на груз I с., они не могут быть удовлетворены из ресурсов $a_{12} = 300$ и $a_{22} = 80$ груза II с. Поэтому клетки (2, 1), (2, 3), (4, 1) и (4, 3) блокируются с помощью произвольно больших затрат M. Аналогично блокируются клетки, через которые ресурсы I с. не могут удовлетворить потребности в грузе II с., т. е. клетки (1, 2), (1, 4), (3, 2) и (3, 4). Наконец, так как суммарные ресурсы составляют 1020 ед., что превышает суммарные потребности на 180 ед., вводим балансовый столбец. Дальнейшее решение задачи выполняется обычными методами. В результате получаем оптимальное решение:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 0 & 120 & 80 \\ 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось вернуться к исходным единицам, пересчитав данные 1-й и 3-й строк путем деления их на 2:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 & 120 & 80 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно этому решению остаток в 50 ед. I с. и 80 ед. II с. остается неиспользованным у поставщика A_1.

148. Найти оптимальный план перевозок по исходным данным задачи 146 и коэффициенту взаимозаменяемости $\alpha = 3$.

149. Решить задачу 147 при условии, что $a_{21} = 200$ и потребности потребителя B_2 должны быть удовлетворены полностью.

150. 1-й склад (A_1) имеет сталь двух марок: 3000 т марки «а» и 4000 т марки «б». 2-й склад (A_2) также имеет сталь двух марок: 5000 т марки «а» и 2000 т марки «б». Сталь должна быть вывезена в два пункта потребления: в пункт B_1 необходимо поставить 2000 т стали марки «а», 3000 т марки «б» и остальные 2000 т стали любой марки.

Аналогично, второй пункт потребления B_2 должен получить 8250 т стали, из них 1000 т марки «а» и 1500 т марки «б».

Известно, что 2 т стали марки «а» могут заменить 1,6 т стали марки «б».

Стоимости перевозок в рублях за тонну составляют: из пункта A_1 в пункты B_1 и B_2 1 руб. и 1,5 руб. и из пункта A_2 в B_1 и B_2, соответственно, 2 руб. и 1 руб. Составить оптимальный план перевозок.

151. Определить оптимальный план перевозок тех же грузов при коэффициенте взаимозаменяемости $\alpha = 2$ и следующих данных о трех поставщиках и двух потребителях.

Поставщики	A_1		A_2		A_3	
	400 «а»	250 «б»	300 «а»	200 «б»	200 «а»	150 «б»
Потребители	B_1		B_2			
	350 «а»	200 «б»	450 «а»	250 «б»	100 «а» или «б»	

	B_1	B_1
A_1	2	3
A_2	4	1
A_3	5	6

152. Определить оптимальный план перевозок из условия доставки груза в кратчайший срок. Известны ресурсы a_i: 30, 35, 40; потребности b_k: 20, 34, 16, 10, 25 и матрица

$$T=\|t_{ik}\|=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3 & 4 & 8\\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7\\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10\end{pmatrix},$$

где t_{ik} — время, затрачиваемое на перевозку груза из i-го пункта отправления в k-й пункт назначения.

Решение. Прежде всего заметим, что если определить план перевозок из условия минимизации функции $z=\sum\sum t_{ik}x_{ik}$ (суммарного времени пробега), то по этому плану, как правило, груз не будет доставлен в кратчайший срок.

Решение задачи начинаем, как обычно, с построения исходного опорного решения, осуществляемого по одному из выше рассмотренных правил. Будем исходить из опорного решения, построенного по правилу «северо-западного угла».

Дальнейшие расчеты можно вести двумя способами: 1) минимизировать функцию z_t, но при дополнительных условиях, вводимых последовательно в процессе решения, и 2) производить последовательные преобразования решения путем построения так называемых «разгрузочных циклов».

Первый способ. I шаг. Подчеркиваем в матрице $T=\|t_{ik}\|$ все элементы, соответствующие занятым клеткам в данном решении, и находим среди них наибольший, который обозначим через t'. Таким образом, $t'=\max\{t_{ik}\}$. Это число, очевидно, определяет срок, в течение которого осуществляются перевозки согласно данному решению. В данном примере $t'=$ $=t_{35}=10$.

II шаг. Все клетки, которым соответствует $t_{ik}\geqslant t'$, блокируем (т. е. заменяем реальные значения t_{ik} на произвольно большое число). В рассматриваемом примере блокированию подлежит единственная клетка (3, 5), куда и заносим вместо $t_{35}=10$ число M.

III шаг. Для измененной на II шаге матрицы T ищем оптимальное решение, минимизирующее функцию $z_t=\sum\sum t_{ik}x_{ik}$.

Это можно сделать, в частности, применяя метод потенциалов. Так, например, в рассматриваемой задаче на предварительном этапе строим для решения X^0 оценочную матрицу T^0 с помощью эквивалентных преобразований:

$$T_1=\left(\begin{array}{ccccc}\underline{2} & \underline{6} & 3 & 4 & 8\\ 1 & \underline{5} & \underline{6} & 9 & 7\\ 3 & 4 & \underline{1} & \underline{6} & \underline{M}\\ -2 & -6 & -7 & -12 & -M\end{array}\right)\begin{array}{c}0\\ 1\\ 6\\ -6\end{array}\rightarrow T_1^0\begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & -8 & \boxed{-M+2}\\ 0 & \underline{0} & \underline{0} & -2 & -M+2\\ 7 & 7 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0}\end{pmatrix}$$

Выделив в матрице отрицательный элемент $t_{15}^0=-M+2$, производим перемещение по циклу числа $\lambda'=\min\{10,\ 11,\ 25\}=10$

и переходим к «лучшему» решению

$$X'=\begin{pmatrix}20 & \cdot & \cdot & \cdot & 10\\ \cdot & 34 & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & 15 & 10 & 15\end{pmatrix}.$$

Снова преобразовываем матрицу T^0 и т. д., пока не будет найдено оптимальное решение $X'_{\text{опт}}$. В рассматриваемом примере после V итерации найдем

$$X'_{\text{опт}}=\begin{pmatrix}\cdot & 30 & \cdot & \cdot & \cdot\\ 10 & \cdot & \cdot & \cdot & 25\\ 10 & 4 & 16 & 10 & \cdot\end{pmatrix}.$$

Теперь возвращаемся к I шагу, продолжая расчет в той же последовательности.

I шаг. В решении $X'_{\text{опт}}$ клетка (3, 5) оказалась освобожденной. Среди элементов занятых клеток наибольшим оказался $t''=t_{25}=7$. Поэтому на II шаге записываем новую матрицу T_2, в которой элементы $t_{15}=8$, $t_{24}=9$, $t_{25}=7$ и $t_{35}=10$ заменены числом M:

$$T_2^0=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3 & 4 & M\\ 1 & 5 & 6 & M & M\\ 3 & 4 & 1 & 6 & M\end{pmatrix}.$$

II шаг. Для измененной матрицы T_2^0 находим, используя метод потенциалов, новое оптимальное решение

$$X''_{\text{опт}}=\begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot & 10 & 20\\ 20 & 10 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 24 & 16 & \cdot & \cdot\end{pmatrix}.$$

Если бы в этом решении все блокированные клетки освободились, то расчет следовало бы продолжить опять, начиная с I шага.

Однако, так как в решении $X''_{\text{опт}}$ блокированные клетки оказались занятыми [клетки (1, 5) и (2, 5)], то найденное на предыдущем этапе решение $X'_{\text{опт}}$ является искомым оптимальным решением по критерию времени. Ему соответствует $t_{\min}=7$ ч.

Второй способ. Запишем в виде обычной распределительной таблицы исходное опорное решение X^0 и матрицу T:

2 20	6 10	3	4	8
1	5 24	6 11	9	7 *
3	4	1 5	6 10	10 25

I шаг. Определяем наибольший элемент t' из всех t_{ik}, соответствующих занятым клеткам, и все клетки с элементами $t_{ik} > t'$ (это могут быть лишь свободные клетки) перечеркиваем.

В данном примере $t' = t_{35} = 10$, а клеток с элементами $t_{ik} > 10$ нет.

II шаг. Начиная с клетки (3, 5) (т. е. клетки, которой соответствует t'), строим «разгрузочный» цикл так, чтобы клетки с нечетными номерами [считая первой разгружаемую клетку (3, 5)] были занятыми.

В данном случае в цикл входят клетки (3, 5), (2, 5), (2, 3) и (3, 3). Перемещая по этому циклу число $\lambda_1 = \min \{11, 25\} = 11$, получим новую таблицу

20	10			
	24			11
*		16	10	14

Поскольку клетка (3, 5) оказалась не полностью разгруженной, продолжаем дальше построение для нее нового разгрузочного цикла.

Таковым будет цикл (3, 5), (2, 5), (2, 2), (1, 2), (1, 1), (3, 1). Перемещая по этому циклу $\lambda_2 = \min \{14, 20, 24\} = 14$, получим новое решение. Теперь клетка (3, 5) освобождена полностью и расчет возобновляется с I шага.

I шаг. Наибольшим элементом в занятых клетках является $t = t_{25} = 7$, поэтому клетки (1, 5), (2, 4) и (3, 5) перечеркиваются.

$\boxed{2}$ 6	$\boxed{6}$ 24	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$
$\boxed{1}$	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$ 25
$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ 16	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{10}$

II шаг. На этом шаге необходимо было бы «разгрузить» клетку (2, 5). Однако построение для нее «разгрузочного» цикла невозможно. Действительно, если снять какое-то число в клетке (2, 5), то для сохранения баланса в 5-м столбце необходимо добавить такое же число в другую клетку этого столбца. Но в 5-м столбце нет неперечеркнутых клеток. Следовательно, «разгрузить» клетку (2, 5) невозможно. На основании этого заключаем, что решение, показанное в последней таблице, является искомым оптимальным решением, обеспечивающим перевозки за время $t_{\min} = 7$ ч.

Заметим, что мы получили отличное от предыдущего оптимальное решение, но с тем же значением $t_{\min} = 7$ ч (альтернативный оптимум). Как обычно, можно построить общее оптимальное решение в виде выпуклой линейной комбинации найденных решений с тем же минимальным сроком доставки $t_{\min} = 7$ ч:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 6-6\alpha & 24+6\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 10\alpha & 10-10\alpha & 0 & 0 & 25 \\ 14-14\alpha & 4\alpha & 16 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Если бы в задаче была дана, кроме матрицы $T = \| t_{lk} \|$, еще и матрица затрат $C = \| c_{lk} \|$, то последнее решение можно было бы использовать для относительной минимизации затрат при том же минимальном сроке доставки груза $t_{\min} = 7$ ч.

Так, например, пусть дополнительно задана матрица

$$C = \begin{pmatrix} 70 & 30 & 60 & 95 & 60 \\ 20 & 80 & 40 & 67 & 30 \\ 50 & 20 & 70 & 40 & 90 \end{pmatrix}.$$

Тогда суммарные затраты на перевозки по плану $X_{\text{опт}}$ будут равны $z_c = 70\,(6-6\alpha) = 30\,(24 + 6\alpha) = 20 \cdot 10\alpha + \ldots + 40 \cdot 10 = 4910 - 1460\alpha$.

Из этого выражения видно, что меньшие затраты будут при $\alpha = 1$, т. е. при решении $X_{\text{опт}}$, найденном первым способом.

153. В следующих транспортных задачах с заданными ресурсами a_i, потребностями b_k, матрицей затрат $C = \| c_{ik} \|$ и матрицей времени перевозок $T = \| t_{ik} \|$ найти оптимальные планы перевозок по критерию затрат ($\min \sum\sum c_{ik}x_{ik}$), по критерию времени (наименьший срок перевозок $t_{\min}$) и критерию минимального суммарного времени пробега $\min(\sum\sum t_{ik}c_{ik})$ и сравнить их:

1) $a_i: 70, 80, 90;$ $b_k: 20, 60, 70, 50, 40;$ $C = \begin{pmatrix} 70 & 100 & 40 & 80 & 50 \\ 90 & 50 & 120 & 60 & 70 \\ 40 & 80 & 30 & 90 & 60 \end{pmatrix};$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix};$$

2) $a_i: 60, 40, 100, 50;$ $b_k: 30, 80, 65, 35, 40;$ $C=\begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix};$

$$T=\begin{pmatrix} 70 & 20 & 40 & 90 & 30 \\ 60 & 40 & 120 & 70 & 80 \\ 20 & 50 & 40 & 30 & 70 \\ 90 & 80 & 50 & 60 & 40 \end{pmatrix};$$

3) $a_i: 40, 25, 35;$ $b_k: 15, 40, 30, 15;$ $C=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{pmatrix};$

$$T=\begin{pmatrix} 80 & 50 & 40 & 40 \\ 50 & 40 & 60 & 100 \\ 40 & 140 & 50 & 70 \end{pmatrix}.$$

154. Известен выпуск продукции на трех заводах: $a_1 = 460$, $a_2 = 340$, $a_3 = 300$; требования на эту продукцию четырех потребителей: $b_1 = 350$, $b_2 = 200$, $b_3 = 450$, $b_4 = 100$; затраты на производство 1-ед. продукции на каждом заводе: $d_1 = 9$, $d_2 = 8$, $d_3 = 2$ и матрица C транспортных расходов на доставку 1 ед. продукции из i-го завода k-му потребителю:

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам из условия минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку. Сравнить с оптимальным планом, построенным из условия минимизации только транспортных расходов.

Указание. Решать как обычную транспортную задачу, предварительно преобразовав матрицу транспортных расходов в матрицу суммарных затрат $\|c'_{ik}\|$, где $c'_{ik} = c_{ik} + d_i$.

155. Решить аналогичную задачу при следующих данных: $a_1 = 500$, $a_2 = 700$, $a_3 = 600$, $b_1 = 400$, $b_2 = 800$, $b_3 = 200$, $b_4 = 300$, $d_1 = 10$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$ и матрице C из задачи 154.

156. В задаче 153 выбрать один из следующих трех вариантов расширения недостающих ресурсов: I — расширение мощности 1-го завода с дополнительными затратами на 1 ед. продукции $\Delta d_1 = 3$; II — расширение мощности 2-го завода $\Delta d_2 = 2$ и III — строительство нового завода с затратами на производство $d_4 = 5$ и на транспортировку 1 ед. изделия $c_{41} = 7$, $c_{42} = 6$, $c_{43} = 5$, $c_{44} = 9$.

Указание. Ввести три дополнительных строки для каждого из вариантов пополнения ресурсов, положив $a_4 = 400$, $a_5 = 400$, $a_6 = 400$. Для приведения к закрытой модели соответственно ввести балансовый столбец с потребностями $b_5 = 800$ и нулевыми затратами, после чего задача решается обычным способом.

157. Строительный песок добывается в трех карьерах и доставляется на четыре строительные площадки. Данные о производительности карьеров за день (a_i в т), потребностях в песке строительных площадок (b_k в т), затратах на добычу песка (d_i в руб./т) и транспортных расходах (c_{ik}) приведены в следующей таблице:

a_i \ b_k	40	35	30	45	a_i
46	4	3	2	5	2
34	1	1	6	4	3
40	3	5	9	4	1

Недостающее количество песка — 30 т в день можно обеспечить следующими тремя путями:

I — увеличение производительности 1-го карьера, что повлечет за собой дополнительные затраты в 3 руб. на добычу 1 т.

II — увеличение производительности 2-го карьера с дополнительными затратами в 2 руб./т.

III — эксплуатация нового карьера с затратами на добычу 5 руб./т и на транспортировку к указанным строительным площадкам $c_{41} = 2$, $c_{42} = 3$ и $c_{43} = 1$ (руб./т).

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами и оптимальный вариант расширения поставок песка.

§ 6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ

По каждому из маршрутов, дополнительно к закрытой модели транспортной задачи заданы ограничения по пропускной способности

$$x_{ik} \leqslant d_{ik} \quad (i=1, \ldots, p;\ k=1, \ldots, q). \tag{1}$$

К решению таких задач может быть приспособлен любой из вычислительных алгоритмов решения обычной транспортной задачи (например, метод потенциалов).

При этом меняются условие разрешимости задачи, построение исходного опорного решения и оценка оптимальности решения.

1. **Разрешимость задачи.** В отличие от обычной задачи, где равенство $\sum_i a_i = \sum_k b_k$ является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи, здесь оно оказывается лишь необходимым условием.

Например, если $\sum_k d_{ik} < a_i$, при каком-то i, то задача решения не имеет. Поэтому достаточным условием разрешимости задачи служит существование хотя бы одного допустимого решения.

2. **Построение исходного решения.** В отличие от обычной задачи, приходится применять итерационный процесс, состоящий из двух этапов.

I. Строится исходное решение по правилу минимального элемента с учетом ограничений (1). При этом, если на данном шаге заносимая в клетку величина x_{ik} определяется размерами ресурсов (a_i) или потребностей (b_k), то, как обычно, в матрице $\| c_{ik} \|$ вычеркивается строка или столбец и находится новый минимальный элемент в «укороченной» матрице. Если же на данном шаге величина x_{ik} определяется только ограничением d_{ik}, то в матрице $\| c_{ik} \|$ вычеркивается только данный элемент c_{ik}. После заполнения всей таблицы может оказаться, что все ресурсы и потребности исчерпаны, т. е. $\sum_k x_{ik} = a_i$ и $\sum_i x_{ik} = b_k$. Тогда полученное решение и является исходным опорным решением. Если же в какой-либо строке (а следовательно, и в столбце) оказался нераспределенный остаток $\left(\text{т. е. } \sum_k x_{ik} < a_i \text{ и } \sum_i x_{ik} < b_k\right)$, то переходят ко II этапу.

II. Обозначим $\sum \left(a_i - \sum_k x_{ik}\right) = \sum_k \left(b_k - \sum_i x_{ik}\right) = \delta$ и введем дополнительные $(p+1)$-ю строку с ресурсами $a_{p+1} = \delta$ и $(q+1)$-й столбец с потребностями $b_{q+1} = \delta$ (подобно открытой модели), приняв $c_{i,q+1} = c_{p+1,k} = M$ и $c_{p+1,q+1} = 0$. Новую расширенную задачу решаем методом потенциалов, пока не освободятся все блокированные клетки. Если этого удается добиться, то получим опорное решение исходной задачи. Если же освободить блокированные клетки не удается, то исходная задача не имеет допустимого решения.

3. **Оценка оптимальности решения.** Для оптимальности решения $X = \| x_{ik} \|$ необходимо и достаточно существование потенциалов

$u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_q$ таких, что:

$$c'_{ik} = c_{ik} + u_i - v_k \geqslant 0, \quad \text{если} \quad x_{ik} = 0; \tag{2}$$

$$c'_{ik} = c_{ik} + u_i - v_k \leqslant 0, \quad \text{если} \quad x_{ik} = d_{ik}; \tag{3}$$

$$c'_{ik} = c_{ik} + u_i - v_k = 0, \quad \text{если} \quad 0 < x_{ik} < d_{ik}. \tag{4}$$

Условия (2) и (4) совпадают с аналогичными условиями обычной транспортной задачи, условие (3) является дополнительным, указывающим, что маршруты с отрицательными приведенными затратами следует загружать максимально допустимой величиной перевозки ($x_{ik} = d_{ik}$).

Замечание. При построении исходного опорного решения, а также при дальнейшем его улучшении следует иметь в виду, что базисными переменными являются лишь те x_{ik}, которые удовлетворяют строгим неравенствам $x_{ik} < d_{ik}$. Однако если их число окажется меньше ранга $r = p + q - 1$, то к базисным можно присоединить необходимое число клеток, для которых $x_{ik} = d_{ik}$ (или $x_{ik} = 0$), но так, чтобы занятые клетки не образовывали замкнутого цикла.

158. Решить транспортную задачу по следующим исходным данным: $a_1 = 25$, $a_2 = 55$, $a_3 = 20$, $b_1 = 45$, $b_2 = 15$, $b_3 = 20$, $b_4 = 20$,

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \|d_{ik}\| = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 15 & \infty \\ 15 & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Символ ∞ в матрице $\|d_{ik}\|$ указывает, что для данной коммуникации нет ограничений по пропускной способности.

Решение. Построение исходного решения удобно проводить в обычной распределительной таблице транспортной задачи, в верхнем правом углу которой указаны элементы c_{ik}, а в левом нижнем углу — элементы d_{ik}.

	45	15	20	20	$q+1$-й
25	9 10	5 •	3 15 15	10 *	M
55	6 15 15	3 15	3 5 10	2 10 10	M 10
20	3 20	8 •	4 0	8 •	M •
$p+1$-я	M •	M •	M •	M 10	0 0

Пунктиром указаны дополнительные $(q+1)$-й столбец и $(p+1)$-я строка, в которые поместим нераспределенные остатки. Будем выделять «базисные» перевозки $(x_{ik} < d_{ik})$ подчеркиванием снизу.

Начинаем заполнение таблицы с клетки (2, 4), которой отвечает минимальный элемент $c_{24} = 2$. Для этой клетки $x_{24} = \min\{a_2\ b_4,\ d_{24}\} = \min\{55,\ 20,\ 10\} = 10 = d_{24}$. Следовательно, эта перевозка является не базисной (определяется пропускной способностью). В матрице C вычеркивается элемент c_{24} и далее находятся следующие по величине минимальные элементы $c_{13} = c_{22} = c_{31} = 3$. Соответствующие им перевозки $x_{13} = \min\{25, 20, 15\} = 15 = d_{13}$ (не базисная), $x_{22} = \min(45,\ 15,\ \infty) = 15$ (базисная) и $x_{31} = \min\{20,\ 45,\ \infty\} = 20$ (базисная)

В остальных клетках 2-го столбца и 3-й строки точками отмечено, что эти столбец и строка «закрываются». Далее находим новый минимальный элемент матрицы C, среди оставшихся ($c_{21} = 6$) и в соответствующую ему клетку заносим $x_{21} = \min\{30,\ 25,\ 15\} = 15 = d_{21}$ (не базисная). Далее заполняем клетки (2,3) перевозкой $x_{23} = \min\{15,\ 5,\ \infty\} = 5$ (базисная), и (1, 1) — перевозкой $x_{11} = \min\{10,\ 10,\ \infty\} = 10$ (базисная). Клетки основной части таблицы оказались все закрытыми, но при этом имеются нераспределенные остатки во 2-й строке и 3-м столбце, которые заносятся в дополнительные (пунктирные) клетки: $x_{25} = 10$ (базисная) и $x_{44} = 10$ (базисная). Мы получили решение расширенной задачи, в котором оказалось 6 базисных переменных вместо $r = p + q - 1 = 8$.

Поэтому включаем в базисные две нулевые перевозки $x_{33} = 0$ и $x_{45} = 0$. Теперь перейдем к выполнению итераций метода потенциалов.

$$C_0 = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc} \underline{9} & 5 & 3 & 10 & M \\ 6 & \underline{3} & \underline{8} & 2 & M \\ \underline{3} & 8 & \underline{4} & 8 & M \\ M & M & M & \underline{M} & \underline{0} \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 6 \\ M+2 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 9 & 5 & 10 & 2M+2 & M+2 \end{array}\end{array} \to$$

$$\to C_1' = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -7 & \boxed{8-2M} & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2-2M & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 12-2M & 4 \\ 2M-7 & 2M-3 & 2M-8 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2M-8 \\ \\ 2M-8 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{l} 2M-8 \end{array}\end{array}$$

В матрице C_1' всем базисным переменным соответствуют нулевые оценки, не базисным переменным $x_{13} = 15$, $x_{21} = 15$ и $x_{24} = 10$ — отрицательные оценки. При этом свободным клеткам (1,4) и (3,4) соответствуют отрицательные оценки, свидетельствующие о возможности дальнейшего улучшения решения.

Выбрав для замещения клетку (1, 4) строим для нее цикл и переходим к новому улучшенному решению:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 10 & \cdot & 15 & * & \cdot \\ 15 & 15 & 5 & 10 & 10 \\ 20 & \cdot & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_1 = 10} X_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{10} & \cdot & \underline{5} & \underline{10} & \cdot \\ 15 & \underline{15} & \underline{15} & 10 & \cdot \\ \underline{20} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 10 \end{array}\right)$$

В решении X_1 освобождены все дополнительные клетки, кроме клетки (4, 5), в которой помещено $x_{45} = 10$. Следовательно, решение X_1 без последней строки и последнего столбца является исходным опорным решением первоначальной задачи. Базисными переменными в нем являются подчеркнутые 6 элементов, что соответствует значению $r = 3+4-1=6$. Вычисляем для него оценочную матрицу:

$$C_0=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cccc}\underline{9}&5&\underline{3}&\underline{10}\\6&\underline{3}&\underline{8}&2\\\underline{3}&8&4&8\end{array}\right)&\begin{array}{c}0\\-5\\6\end{array}\\\begin{array}{cccc}9&-2&3&10\end{array}&\end{array}\to C'=\begin{pmatrix}0&7&0&0\\-8&0&0&-13\\0&0&7&4\end{pmatrix}.$$

В матрице C' всем базисным клеткам решения X_1 соответствуют нулевые оценки; свободным клеткам (1, 2), (3, 2), (3, 3) и (3, 4) — неотрицательные оценки; двум не базисным переменным $x_{21} = 15$ и $x_{24} = 10$ соответствуют отрицательные оценки. Следовательно, условия оптимальности (2) — (4) выполнены и решение X_1 является оптимальным решением задачи.

159. Решить следующие транспортные задачи с ограничениями по пропускным способностям:

1) $a_1 = 30$, $a_2 = 25$, $a_3 = 45$, $b_1 = 20$, $b_2 = 15$, $b_3 = 25$, $b_4 = 40$;

$$C=\begin{pmatrix}3&5&2&6\\4&7&5&3\\8&6&4&9\end{pmatrix},\quad \|d_{ik}\|=\begin{pmatrix}12&9&15&23\\20&10&9&12\\8&15&20&10\end{pmatrix};$$

2) $a_1 = 45$, $a_2 = 65$, $a_3 = 40$, $b_1 = 70$, $b_2 = 30$, $b_3 = 50$;

$$C=\begin{pmatrix}5&2&3\\7&9&6\\4&7&5\end{pmatrix},\quad \|d_{ik}\|=\begin{pmatrix}30&25&25\\40&15&20\\25&20&15\end{pmatrix};$$

3) $a_1 = 35$, $a_2 = 70$, $b_1 = 30$, $b_2 = 15$, $b_3 = 35$, $b_4 = 10$;

$$C=\begin{pmatrix}3&6&5&7\\6&4&8&2\end{pmatrix},\quad \|d_{ik}\|=\begin{pmatrix}15&10&18&12\\22&14&30&15\end{pmatrix};$$

4) $a_1 = 75$, $a_2 = 65$, $b_1 = 50$, $b_2 = 20$, $b_3 = 40$, $b_4 = 30$;

$$C=\begin{pmatrix}2&8&3&6\\7&4&5&8\end{pmatrix},\quad \|d_{ik}\|=\begin{pmatrix}40&25&20&15\\10&30&30&20\end{pmatrix};$$

5) $a_1 = 40$, $a_2 = 20$, $a_3 = 40$, $a_4 = 20$, $b_1 = 30$, $b_2 = 60$, $b_3 = 30$;

$$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&4&2\\4&2&1\\1&5&3\end{pmatrix}\quad \|d_{ik}\|=\begin{pmatrix}10&30&20\\10&10&10\\10&20&10\\20&10&10\end{pmatrix}.$$

ГЛАВА VII

Распределительные задачи

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ

Задачи оптимального распределения взаимозаменяемых ресурсов получили название *распределительных задач.*

160. (Постановка задачи.) Найти оптимальное распределение p различных взаимозаменяемых ресурсов, имеющихся в количестве $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p$, для удовлетворения q различных потребностей в количествах $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_q$ при заданных матрицах $\|c_{ik}\|$ и $\|\lambda_{ik}\|$, где c_{ik} — оценки использования единицы i-го ресурса на удовлетворение k-х потребностей и λ_{ik} — количество единиц k-х потребностей, которые удовлетворяются единицей i-го ресурса.

Решение. Введем переменные x_{ik} — количество единиц i-х ресурсов, используемых для удовлетворения k-х потребностей. Задача состоит в определении $n = pq$ величин x_{ik}, удовлетворяющих ограничительным условиям:

$$x_{ik} \geqslant 0 \quad (i=1, \ldots, p, \quad k=1, \ldots, q), \tag{1}$$

$$\sum x_{ik} \leqslant a_i \quad (i=1, \ldots, p), \tag{2}$$

$$\sum \lambda_{ik} x_{ik} \geqslant b_k \quad (k=1, \ldots, q) \tag{3}$$

и максимизирующих (или минимизирующих) функцию

$$z = \sum \sum c_{ik} x_{ik}. \tag{4}$$

В зависимости от конкретного характера задачи может варьироваться конкретное содержание, а также размерность исходных величин a_i, b_k, c_{ik} и λ_{ik}, что в свою очередь приведет к некоторой модификации модели (1) — (4).

Так, например, λ_{ik} может выражать число единиц i-х ресурсов, затрачиваемых на единицу k-х потребностей. Тогда ограничения (2) и (3) заменятся на $\sum x_{ik} \leqslant a_i$ и $\sum x_{ik}/\lambda_{ik} \geqslant b_k$. Если при этом c_{ik} означают оценки единицы k-го изделия в руб/шт., то изменится и выражение для целевой функции $z = \sum\sum c_{ik}/\lambda_{ik} x_{ik}$ и т. д.

Функция z может максимизироваться, если c_{ik} означают прибыль, стоимость и т. д., или минимизироваться, если эти оценки измеряют затраты, себестоимость и т. д.

Форма модели будет также зависеть от выбора переменных x_{ik}. Вне зависимости от этих конкретных модификаций модели (1) — (4), она имеет некоторое сходство с транспортной.

Однако наличие в одной из групп ограничений множителей λ_{ik} (из-за чего возникло название «λ-модель») приводят и к известным осложнениям при анализе этих моделей. Распределительные задачи решаются с помощью специальных вычислительных методов, представляющих собой модификацию методов решения транспортных задач.

При некоторых специальных свойствах матрицы $\|\lambda_{ik}\|$ возникают частные виды распределительных задач, которые могут быть приведены к моделям обычных транспортных задач. Такими частными видами задач являются:

1) простые распределительные задачи (все $\lambda_{ik}=\text{const}$ при любых i и k);

2) задачи с однородными ресурсами (все строки матрицы $\|\lambda_{ik}\|$ одинаковы, т. е. $\lambda_{ik} = \lambda_{1k}$ при различных i);

3) задачи с пропорциональными ресурсами ($\lambda_{ik} = \alpha_i\lambda_{ik}$ при различных i).

161. Составить модели распределительных задач при следующих данных:

1) a_i — ресурсы i-го вида оборудования в станко-часах, b_k — плановое задание на изготовление k-х изделий в штуках, λ_{ik} — производительность i-го оборудования по k-му изделию в шт./ч, c_{ik} — себестоимость единицы k-го изделия при его изготовлении на i-м оборудовании в руб./шт.;

2) a_i, b_k, λ_{ik} те же, c_{ik} — прибыль в руб./шт.;

3) a_i, b_k, λ_{ik} те же, c_{ik} — затраты в руб./ч;

4) a_i, b_k те же, λ_{ik} — нормы затрат времени в ч/шт., c_{ik} — прибыль в руб./шт.;

5) a_i, b_k те же, λ_{ik} — нормы затрат времени в ч/шт., c_{ik} — себестоимость в руб./шт.;

6) a_i, b_k, λ_{ik} те же, что и в (5), c_{ik} — затраты в руб./ч;

7) a_i, b_k, λ_{ik} те же, что и в (5), условие — минимизация времени загрузки оборудования;

8) a_i, b_k те же, λ_{ik} — производительность в шт./ч, условие — минимизация загрузки оборудования.

162. В задачах 161 (1—8) дать развернутую словесную формулировку приняв $p = 2$ и $q = 3$.

163. Составить матрицу условий распределительной задачи, приняв ограничения (2) и (3) в форме уравнений и определить ее ранг.

§ 2. ПРОСТЫЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

164. Найти оптимальное распределение трех видов механизмов, имеющихся в количествах $a_1 = 45$, $a_2 = 20$ и $a_3 = 35$ между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равны $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$, $b_4 = 40$, при следующей матрице производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нулевые элементы означают, что данный механизм на данном участке работы не может быть использован.

165. Составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющихся в количествах 60, 30, 45, 25 между пятью видами работ; потребности в специалистах для каждого вида работы соответственно равны 20, 40, 25, 45, и 30; матрица

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе.

166. Распределить 4 сорта топлива в количестве 70, 40, 50 и 40 т между четырьмя агрегатами, потребности которых соответственно равны 30, 50, 30, 80 т; известна матрица

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

элементы c_{ik} которой характеризуют теплотворную способность i-го сорта топлива при использовании его в k-м агрегате.

167. Четыре различных предприятия могут выпускать любой из четырех видов продукции. Производственные мощности предприятий позволяют обеспечить выпуск продукции каждого вида в количествах 50, 70, 100 и 30 тыс. шт., а плановое задание составляет соответственно

30, 80, 20 и 100 тыс. шт. Матрица

$$C = \|c_{ik}\| = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

характеризует себестоимость единицы k-го вида продукции при производстве его на i-м предприятии. Найти оптимальное распределение планового задания между предприятиями.

168. Четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 700, 500, 450 и 550 машин при себестоимости ремонта одной машины в 50, 70, 65 и 60 руб. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 350, 350, 300, 300 и 200 машин.

Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ, а 3-й и 4-й мастерских — только на указанный вид работ. Матрица

$$C = \|c_{ik}\| = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 70 & 50 \\ 20 & 80 & 30 & 10 \\ 60 & 30 & 30 & 40 \\ 10 & 40 & 50 & 50 \\ 20 & 30 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризует транспортные расходы на доставку машины с i-й автобазы в k-ю ремонтную мастерскую. Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объема ремонтных работ по всем автобазам.

§ 3. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОДНОРОДНЫМИ РЕСУРСАМИ

Ресурсы $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p$ однородные и полностью взаимозаменяемые, потребности $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_q$ — разнородные (измеряемые в различных единицах). Числа $\lambda_{ik} = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, q)$ указывают количество единиц k-х потребностей, которые могут быть удовлетворены единицей любого ресурса. Числа c_{ik} по-прежнему характеризуют эффективность единицы i-го ресурса при удовлетворении им k-х потребностей, Если, как и в § 1 ввести переменные x_{ik}, обозначающие количество единиц i-х ресурсов, направляемых на удовлетворение k-х потребностей, то придем к той же модели (1) — (4), в которой лишь упростятся ограничения (3), принимающие в данном случае вид $\sum_i \lambda_k x_{ik} \geqslant b_k$.

Разделив эти неравенства почленно на k и обозначив $b_k/\lambda_k = b'_k$, получим модель обычной транспортной задачи:

$$\sum_k x_{ik} \leqslant a_i, \quad (i=1, \ldots, p), \quad \sum_i x_{ik} \geqslant b'_k \quad (k=1, \ldots, q),$$

$$z = \sum \sum c_{ik} x_{ik} \text{ (min)}$$

с ресурсами a_i, потребностями b'_k и коэффициентами затрат c_{ik} (или $-c_{ik}$, если величины c_{ik} характеризуют эффективность в положительном смысле).

К подобным же моделям приводятся задачи с разнородными, но взаимозаменяемыми ресурсами, и однородными потребностями. В этом случае задаются величины λ_i, характеризующие количество единиц потребностей, которые могут быть удовлетворены единицей i-го ресурса (см. задачу 160).

169. На трех участках посевных площадей размером в 300, 500 и 400 га могут быть посажены 4 вида с.-х. культур, которые необходимо вырастить в количестве, соответственно 600, 1500, 225 и 1250 т. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 50 & 40 & 15 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

характеризует себестоимость 1 т при выращивании i-й культуры на k-м участке. Составить оптимальный план посева, если урожайность по различным культурам не зависит от участка посева и составляет 20, 30, 15 и 50 ц/га.

170. Ресурсы угля трех сортов составляют 300, 800 и 400 т, а их теплотворная способность соответственно 1800, 2500, 3000 кал/кг. Уголь сжигается в четырех печах, потребности которых составляют 750, 920, 1100 и 800 млн. кал. Суммарные затраты на производство и доставку каждого сорта угля до каждой печи (в руб. /т) задаются следующей матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 18 & 18 \\ 30 & 25 & 15 & 20 \\ 36 & 30 & 24 & 21 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план распределения ресурсов угля по печам.

171. Найти оптимальное распределение трех взаимозаменяемых механизмов по четырем видам земляных работ при заданных ресурсах времени каждого механизма 240, 160 и 150 ч, производительности механизмов 30, 55, 18 м^3/ч, объеме подлежащих выполнению работ 5, 2, 3 и 8 тыс. м^3 и матрице C себестоимости работ в руб/м^3:

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0,5 & 1,2\\ 0,8 & 1,2 & 0,9 & 0,8\\ 0,5 & 1,0 & 0,6 & 0,9\end{pmatrix}.$$

172. На четырех ткацких станках с объемом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-часов может изготовляться ткань трех артикулов в количествах 260, 200, 340 и 500 м за 1 ч. Составить программу загрузки станков, если прибыль (в руб.) от реализации 1 м ткани i-го артикула при ее изготовлении на k-м станке характеризуется элементами матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2,5 & 2,2 & 2,0 & 2,8\\ 1,6 & 1,0 & 1,9 & 1,2\\ 0,8 & 1,0 & 0,6 & 0,9\end{pmatrix},$$

а суммарная потребность в ткани каждого из артикулов равна 200, 100 и 150 тыс. м.

173. Имеется три сорта бумаги в количествах 10, 8 и 5 т, которую можно использовать на издание четырех книг тиражом в 8 000, 6 000, 15 000 и 10 000 экз. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,6; 0,8; 0,4 и 0,5 кг, а себестоимость (в коп.) печатания книги при использовании i-го сорта бумаги задается матрицей

$$C=\begin{pmatrix}24 & 16 & 32 & 25\\ 18 & 24 & 24 & 20\\ 30 & 24 & 16 & 20\end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов.

§ 4. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ РЕСУРСАМИ

Ресурсы $a_1, \ldots, a_2, \ldots a_p$ и потребности $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_q$ неоднородные, но в матрице $\|\lambda_{ik}\|$, элементы которой устанавливают связь между единицами ресурсов и потребностей, строки пропорциональны, т. е. $\lambda_{ik}=\alpha_i\lambda_{ik}$ ($k=1, \ldots, q$), где числа α_i называются *индексами* i-х ресурсов.

Если в модель (1) — (4) подставить выражения для λ_{ik} и обозначить

$$a_i\alpha_i = a'_i, \quad \frac{b_k}{\lambda_{ik}} = b'_k, \quad \frac{c_{ik}}{\alpha_i} = c'_{ik}, \quad x_{ik}\alpha_i = y_{ik}, \tag{5}$$

то вновь получим модель транспортной задачи: при условиях

$$y_{ik} \geqslant 0 \quad (i=1, \ldots, p, \ k=1, \ldots, q), \tag{1'}$$

$$\sum_k y_{ik} \leqslant a'_i \quad (i=1, \ldots, p), \tag{2'}$$

$$\sum_i y_{ik} \geqslant b'_k \quad (k=1, \ldots, q), \tag{3'}$$

минимизировать (или максимизировать) функцию

$$z = \sum \sum c'_{ik} y_{ik}. \tag{4'}$$

Замечание. При иной, чем в начале § 1 интерпретации чисел c_{ik} и λ_{ik} (см. задачу 160) изменится форма модели (1) — (4), а, следовательно, переход к модели (1′) — (4′) потребует введения иных обозначений (5). Поэтому, при решении конкретных задач, сначала составляется исходная модель, а затем путем введения обозначений вида (5) она приводится к транспортной модели.

174. Составить оптимальную производственную программу по обработке четырех видов изделий А, Б, В и Г на трех взаимозаменяемых станках по следующим исходным данным:

Станки	Ресурсы времени, ч	Себестоимость, руб./шт.				Производительность, шт./ч			
		А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
I	240	2,0	1,0	0,5	1,2	30	50	30	20
II	150	0,8	1,2	0,9	0,8	60	100	60	40
III	150	0,5	1,0	0,6	0,9	18	30	18	12
Плановое задание, тыс. шт.		3	15	4,5	1,5				

175. Найти оптимальный план выпуска пяти изделий (А, Б, В, Г и Д) на четырех предприятиях по исходным данным:

Предприятия	Ресурсы времени, ч	Производственные издержки, руб./шт.					Производительность, шт./ч				
		А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
I	100	—	4	5	4	8	—	21	9	15	18
II	60	2,4	5	—	4	6	30	42	—	30	36
III	120	—	3	9	3	7	—	14	6	10	12
IV	60	3,6	4	8	—	6	45	63	27	—	54
Плановое задание, тыс. шт.		1,5	2,1	0,36	0,6	3,6					

Решить задачу по следующим критериям оптимальности:

1) минимизация производственных издержек;

2) минимизация времени загрузки оборудования;

3) максимизация прибыли, при заданных отпускных ценах на изделия 10, 7, 12, 8 и 10 руб./шт.

176. Составить оптимальный план посева четырех культур на трех участках посевной площади по следующим исходным данным:

Участки	Размер посев. площади, га	Урожайность, ц/га Себестоимость, руб./ц			
		Кукуруза	Горох	Капуста	Рожь
I	300	10 100	20 60	25 80	40 35
II	500	15 85	25 50	15 65	40 30
III	400	18 120	20 70	10 100	20 40

Указание. Если строгой пропорциональности между строками матрицы $\|\lambda_{ik}\|$ (в данном случае матрицы урожайности) нет, но отношения $\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{1k}}$ незначительно варьируют вдоль строки, то можно воспользоваться тем же методом перехода к транспортной модели, вычисляя индексы α_i приближенно по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\alpha_i \approx \frac{\sum\limits_k \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{1k}} b_k}{\sum\limits_k b_k}.$$

После нахождения приближенного оптимального решения можно снова пересчитать уточненные индексы по формуле

$$\alpha_i \approx \frac{\sum\limits_k \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{1k}} x_{ik}^*}{\sum\limits_k x_{ik}^*},$$

где x_{ik}^* берутся из найденного в первом приближении оптимального решения.

177. Решить задачу 176 при матрице урожайности

$$\lambda = \begin{pmatrix} 100 & 60 & 80 & 35 \\ 80 & 40 & 60 & 25 \\ 125 & 80 & 90 & 40 \end{pmatrix}.$$

178. Четыре различных вида изделий (А, Б, В и Г) могут изготовляться из трех видов сырья (I, II и III). В связи с различными отпускными ценами на единицу изделия в зависимости от используемого сырья, различными производственными затратами при использовании различного сырья, прибыль, получаемая от реализации единицы изделия, зависит от вида продукта и используемого при его изготовлении вида сырья. В таблице приведены исходные данные задачи:

Сырье	Нормы расхода, кг/шт.				Прибыль, руб./шт.				Запасы сырья, кг
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
I	12	8	16	6	72	56	32	54	300
II	6	4	8	3	60	24	80	42	200
III	9	6	12	4,5	36	96	64	24	450
Плановое задание, шт.					20	30	40	25	

Составить оптимальный план использования сырья по следующим критериям:

1) максимизация суммарной прибыли;

2) минимизация использования сырья;

3) решить задачу (2) при условии, что нормы расхода характеризуются матрицей

$$\lambda = \|\lambda_{ik}\| = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 & 6 \\ 6 & 5 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

§ 5. ОБЩИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Общая модель таких задач (1) — (4), называемая λ-моделью, получается при произвольном характере матрицы $\lambda = \|\lambda_{ik}\|$.

Для решения используется либо специальный метод, представляющий собой видоизменение метода потенциалов, либо общие методы (например, симплексный). В последнем случае это приводит к некоторому усложнению вычислений.

179. В следующих задачах составить модель и найти оптимальную программу обработки трех изделий (А, Б, В) на двух взаимозаменяемых станках (I, II) при следующих исходных данных:

Станки	Нормы времени, ч/шт.			Рабочее время, ч	Себестоимость, руб./ч		
	А	Б	В		А	Б	В
I	2	5	3	200	3	2	4
II	4	7	5	350	2,5	2	3
План, шт.	80	30	10	Прибыль, руб./шт.	20	40	30

В качестве критерия оптимальности выбрать:

1) минимум себестоимости;

2) минимум затрат времени работы станков;

3) максимум прибыли.

180. Имеется три сорта взаимозаменяемого сырья в количествах 200, 100, 300 кг, которое используется при производстве четырех продуктов в количестве 25, 45, 30, 70 единиц. В матрицах указаны соответственно расход сырья (в кг) и производственные затраты на единицу продукта (в руб.):

$$\lambda = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2{,}4 & 3 \\ 3{,}5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 20 & 35 \\ 30 & 25 & 45 & 40 \\ 20 & 45 & 30 & 35 \end{pmatrix}.$$

Составить математическую модель задачи определения оптимального плана использования сырья.

181. Имеются три предприятия (1, 2, 3), располагающие для выпуска продукции А, Б, В двумя видами ресурсов (I, II), объемы которых составляют для 1-го предприятия 250 и 150 ед., для 2-го 100 и 200 ед. и для 3-го соответственно 240 и 300 ед. Заданы нормы затрат каждого ресурса на i-м предприятии для производства единицы k-й продукции ($k = 1, 2, 3$), себестоимость производства единицы k-й продукции на i-м предприятии и объем производства k-й продукции, предусмотренный производственной программой. Все указанные числовые данные помещены в следующей таблице:

Предприятия	Нормы затрат						Себестоимость		
	А		Б		В		А	Б	В
	I	II	I	II	I	II			
1 2 3	2 1,5 2,2	4 5 3	1,1 1,6 1,2	2 3 2,4	2,5 2,2 2,4	3 2,5 4,2	2 3 2,5	8 7 9	5 6 7
Производственная программа							300	170	250

1) Составить математическую модель для определения оптимальной специализации производства из условия минимизации суммарной себестоимости.

2) Решить ту же задачу из предположения, что I вид ресурсов жестко закреплен за предприятием, а II вид можно передавать из одного предприятия другому.

182. Плановое задание по изготовлению четырех моделей костюмов необходимо распределить между тремя швейными фабриками. Производственные мощности i-й фабрики ($i = 1, 2, 3$) позволяют за рассматриваемый отрезок времени выпустить λ_{ik} костюмов k-й модели ($k = 1, 2, 3, 4$). Заданы цены c_k на костюм k-й модели и себестоимости s_{ik} изготовления k-й модели костюма на i-й фабрике. Числовые данные указаны в таблице.

λ_{ik} s_{ik}

План	180	150	100	100
Костюмы Фабрики	1	2	3	4
I	120 40	240 40	300 50	150 20
II	240 25	300 30	200 25	300 40
III	150 40	240 50	300 40	200 30
Цена	50	65	80	50

Решить, опираясь на эти данные, следующие задачи:

1. Может ли быть выполнено плановое задание?
2. Составить оптимальный план загрузки фабрик из условия минимизации себестоимости плановой продукции.
3. Составить оптимальный план загрузки из условия максимизации прибыли при точном выполнении планового задания.
4. То же, при допустимости перевыполнения плана.
5. Составить оптимальный план загрузки фабрик, обеспечивающий максимальное количество комплектов костюмов, если числа планового задания рассматривать как ассортиментные отношения. Оценить при этом ресурсы мощностей каждой из фабрик.

В задачах 3—5 составить математическую модель.

183. На трех участках колхозного поля могут выращиваться три культуры: рожь, пшеница и ячмень. В следующей таблице указаны размеры участков в гектарах, урожайность λ_{ik} (в ц/га) на каждом из участков по каждой культуре (правый верхний угол клетки), затраты c_{ik} в чел.-ч на 1 ц (левый нижний угол клетки) и плановое задание по сбору этих культур (в ц):

λ_{ik} c_{ik}

Культуры Участки в га	Урожайность и затраты		
	Рожь	Пшеница	Ячмень
30	12 2	16 2,5	16 3
50	10 2,4	12 3,0	20 3,2
20	15 1,8	16 2	24 2,5
План	500	200	400

Решить следующие задачи:

1. Определить оптимальную структуру посевов, минимизирующую суммарные затраты.

2. Определить оптимальную структуру посевов, обеспечивающую максимальное перевыполнение плана при сохранении планового ассортимента (5 : 2 : 4).

3. Известно дополнительно, что колхоз располагает парком тракторов, который может выделить для обработки данных участков 12000 тракторо-часов, затрачивая на обработку 1 га на соответствующих участках 160, 140 и 120 ч.

Составить оптимальную структуру посевов, максимизирующую суммарный сбор урожая при плановом ассортиментном соотношении 5 : 2 : 4.

4. При дополнительных данных задачи 3 определить оптимальную структуру посевов, обеспечивающую выполнение планового задания с минимальными затратами.

184. Авиакомпания для организации пассажирских перевозок между центром и четырьмя городами располагает тремя группами самолетов: I группа из 10 четырехмоторных самолетов, II — из 25 двухмоторных и III группа — из 40 двухмоторных старого образца.

Количество пассажиров в тыс. человек, перевозимых одним самолетом данного типа по каждому маршруту за 1 месяц, и связанные с этим эксплуатационные расходы на 1 самолет в тыс. руб. указаны соответственно в правых верхних и левых нижних углах каждой клетки таблицы. Там же в двух последних строках приведены количество пассажиров, которое нужно перевезти по данному маршруту в месяц, и стоимость одного билета.

Маршрут Самолет	Города			
	1	2	3	4
I	1,6 16	2,2 20	1,3 15	—
II	2,8 30	3,0 25	2,4 20	2 25
III	0,8 15		1,0 12	1,5 16
Количество пассажиров, тыс. чел.	20	50	40	30
Стоимость билета	25	15	20	15

Распределить самолеты по маршрутам из условия достижения максимальной прибыли авиакомпаний.

Часто распределительные задачи могут возникать в измененной формулировке, когда объемы потребностей не указываются точно, а задается лишь их ассортиментное соотношение: $\frac{b_1}{\beta_1}=,\ldots,=\frac{b_k}{\beta_k}=$ $=,\ldots,=\frac{b_q}{\beta_q}$. Сохраняя принятые в начале § 1 обозначения, получим в данном случае модель, отличную от (1) — (4): при условиях

$$x_{ik}\geqslant 0 \quad (i=1,\ \ldots,\ p,\ k=1,\ \ldots,\ q),$$

$$\sum_k x_{ik}\leqslant a_i \quad (i=1,\ \ldots,\ p), \qquad \sum_i \lambda_{ik}x_{ik}=\beta_k z \quad (k=1,\ \ldots,\ q),$$

максимизировать общее число комплектов

$$z=\frac{1}{\beta_1}\sum \lambda_{i1}x_{i1}.$$

Однако полученная модель уже не является распределительной задачей в прежнем смысле, так как речь идет об определении не только оптимального распределения, но и определении максимального выпуска.

185. Три предприятия (I, II, III) могут обеспечить на каждом выпуск трех видов изделий (А, Б, В). Основные производственно-экономические данные приведены в следующей таблице. Составить оптимальный годовой план загрузки предприятий из условия получения максимального числа комплектов, в каждый из которых изделия входят в отношении 1 : 2 : 3.

Предприятия	Месячная производительность, шт.			Себестоимость, руб./шт.		
	А	Б	В	А	Б	В
I	3000	4000	6000	15	20	25
II	5000	4000	9000	16	18	20
III	4000	2000	6000	12	15	16

§ 6. ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ НАЗНАЧЕНИИ

186. (Постановка задачи.) Найти оптимальное распределение q работ между p исполнителями при заданной матрице эффективности $C = \| c_{ik} \|$, где c_{ik} характеризует в количественной форме эффективность выполнения i-й работы ($i = 1, 2, \ldots, p$) k-м исполнителем ($k = 1, 2, \ldots, q$) при следующих дополнительных условиях:

а) каждый исполнитель может выполнять только одну работу,

б) каждая работа может выполняться только одним исполнителем.

Указанные задачи могут решаться как общими методами, применяемыми для любых транспортных задач (распределительным, методом потенциалов и т. д.), так и специальными методами, использующими упрощающие особенности данной модели ($a_i = b_k = 1$). Однако применение общих методов при решении задач об оптимальных назначениях приводит к техническим осложнениям, вызванным тем, что любое опорное решение задачи будет вырожденным, содержащим $p - 1$ «базисных» нулей.

187. Составить оптимальный план назначения при следующей матрице эффективности:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 4 & 3 & 10 \\ 5 & 3 & 9 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Первый способ. Будем исходить из матрицы «затрат» $C_1 = -C$. Однако для того чтобы не оперировать отрицательными числами, воспользуемся эквивалентным преобразованием матрицы затрат, заключающимся в прибавлении ко всем ее элементам одного и того же числа 10 (наибольшего из всех чисел

c_{ik}). В результате получим следующую матрицу с неотрицательными элементами:

$$C_1=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}7 & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1}\\ 6 & 6 & 7 & 0\\ 5 & 7 & \underline{1} & 8\\ \underline{3} & \underline{5} & 6 & \underline{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}-3\\ -2\\ -2\\ -5\end{matrix}\\ \begin{matrix}2 & 0 & 1 & 2\end{matrix}\end{array}$$

Теперь строим исходное опорное решение по одному из известных правил (например, правилу «минимального элемента»). При этом после занесения очередной единицы в соседнюю по столбцу или строке клетку, которой соответствуют меньшие затраты, помещаем «базисный» нуль, так как каждая единица одновременно закрывает столбец и строку.

В результате получим исходное решение X_0 и соответствующую ему оценочную матрицу C_1^0:

$$X^0=\begin{pmatrix}\cdot & 1 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & 1\\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot\\ 1 & 0 & \cdot & *\end{pmatrix};\qquad C_1^0=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 4 & 6 & 0\\ 5 & 5 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 2 & \boxed{-1}\end{pmatrix}.$$

Единственный отрицательный элемент $c_{44}^0 = -1$ указывает на возможность «улучшения» решения X^0. В действительности улучшения не произойдет, так как по соответствующему клетке (4, 4) циклу перемещается $\lambda = 0$. Этот нуль, помещенный в клетку (4, 4), снимается в клетке (4, 2), которой соответствуют бóльшие затраты ($c_{42} > c_{14}$). Новая оценочная матрица оказывается состоящей из одних неотрицательных элементов; отсюда делаем вывод, что X^0 есть оптимальное решение. Согласно этому решению 1-я работа закрепляется за 2-м исполнителем, 2-я — за 4-м, 3-я — за 3-м и, наконец, 4-я работа за 1-м исполнителем. Суммарная эффективность при этом достигнет максимума и составит $z_{\max} = 33$ ед.

Второй способ. Приведенный выше метод решения оказался случайно не очень трудоемким, но, вообще говоря, он часто бывает сопряжен с большим числом итераций.

Способ, который сейчас будет указан, основан на последовательном решении двойственной задачи, модель которой запишется следующим образом: максимизировать функцию

$$T=\sum_i u_i-\sum_k v_k \tag{$*$}$$

при условиях

$$u_i+v_k \geqslant c_{ik} \text{ для всех } i \text{ и } k. \tag{$**$}$$

I шаг. В приведенной ниже таблице записана матрица эффективностей $\| c_{ik} \|$. В каждой строке находим наибольший элемент c_{ik} и определяем начальные значения u_i и v_k из условия $v_k = 0$ и $u_i = \max \{c_{ik}\}$ по строке.

II шаг. Все элементы c_{ik}, для которых выполняется равенство $u_{ik} - v_k = c_{ik}$, подчеркиваем.

Определить оптимальное число скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума.

198. Решить предыдущую задачу, если пропускная способность дороги не позволяет в день пройти более чем шести пассажирским поездам.

199. Оборудование фабрики позволяет выпускать фруктовые компоты в трех видах тары: стеклянной в количестве 10 ц, жестяной в количестве 8 ц и полиэтиленовой в количестве 5 ц.

Найти производственную программу предприятия, максимизирующую прибыль, если себестоимость 1 ц компота составляет: в стеклянной таре — 16 руб., в жестяной — 10 руб. и в полиэтиленовой — 16 руб. Отпускная цена независимо от тары составляет 40 руб. за 1 ц.

200. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г).

В следующей таблице приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и себестоимости (коп./кг) этих продуктов:

Компонент / Продукты	Количество кормовых единиц	Белок, г/кг	Кальций, г/кг	Фосфор, г/кг	Себестоимость, коп./кг
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Определить оптимальный рацион из условия минимума себестоимости.

201. В цехе три токарных станка и один автомат. Необходимо организовать производство двух деталей в комплекте: на каждую деталь № 1 три детали № 2 и две № 3. Составить, используя графическое решение, программу работы станков, при которой будет произведено максимальное число комплектов, если дневная производительность каждого станка по каждой из деталей задана в следующей таблице:

Станки \ Детали	№ 1	№ 2	№ 3
Токарный	50	40	80
Автомат	120	90	60

202. Для изготовления двух видов изделий *A* и *B* фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовлении указанных двух изделий заняты токарные и фрезерные станки.

В следующей таблице приведены исходные данные задачи:

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		изделие *A*	изделие *B*
Сталь (кг)	570	10	70
Цветные металлы (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко-ч) . . .	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-ч) . .	3400	200	100
Прибыль (тыс. руб.)		3	8

Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО АССОРТИМЕНТА

203. (Постановка задачи.) Имеется p видов ресурсов в количествах $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p$, которые могут быть использованы при производстве q видов изделий. Задана матрица $A = \| a_{ik} \|$, где a_{ik} характеризует нормы расхода k-го ресурса на единицу k-го изделия ($k = 1, 2, \ldots, q$).

Эффективность выпуска единицы k-го изделия характеризуется показателем c_k, удовлетворяющим условию «линейности», согласно которому суммарная эффективность выпуска α_1 изделий с показателем c_1 и α_2 изделий с показателем c_2 равна $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$. Определить план выпуска изделий (оптимальный ассортимент), при котором суммарный показатель эффективности принимает наибольшее значение.

Решение. Обозначив количество единиц k-х изделий, выпускаемых предприятием, через $x_k \geqslant 0$ (где $k = 1, 2, \ldots, q$), получим математическую модель задачи: максимизировать

$$z = \sum_{k=1}^{q} c_k x_k \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ik} x_k \leqslant a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{2}$$

Дальнейшее решение задачи можно получить, используя симплексный метод.

Замечание. Кроме указанных ограничений по ресурсам (2), в условие задачи, а следовательно, и в ее математическую модель могут вводиться дополнительные ограничения на планируемый выпуск продукции (ограничения по ассортименту, условия комплектности и т. д.).

204. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в следующей таблице:

Вид товара / Вид ресурса	1	2	3	4	Объем ресурсов
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, ч	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу товара, руб.	30	25	56	48	

По этим исходным данным решить следующие задачи.

1. Какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?

2. Определить оптимальный ассортимент при дополнительном условии: 1-го товара выпустить не более 5 ед., 2-го — не менее 8 ед., а 3-го и 4-го — в отношении 1 : 2.

3. Дополнительно к задаче 1 заданы производственные издержки в рублях на 1 ед. каждого изделия: 6, 9, 12, 3. Найти оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, при условии, что суммарные производственные издержки не должны превышать 96 руб.

4. В задаче 1 определить, как повлияет на максимальную прибыль увеличение каждого из видов ресурсов на единицу.

5. Определить изменение в оптимальном ассортименте, найденном в задаче 1, если ресурсы сырья увеличены на 50%, а ресурсы рабочей силы и оборудования на 30%.

6. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий нормативную стоимость обработки, если нормативные стоимости обработки единицы каждого вида товаров заданы числами 17, 35, 20, 15.

205. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используются два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 800 чел.-ч.

В таблице приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на 1 ед. изделия:

Изделия Ресурсы	Затраты на 1 ед. изделия			
	столы	стулья	бюро	книжные шкафы
Доски I типа, м	5	1	9	12
Доски II типа, м . . .	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2	5	10
Прибыль, руб./шт. . . .	12	5	15	10

По этим исходным данным решить следующие задачи.

1. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль.

2. Решить ту же задачу при дополнительных условиях, налагаемых на ассортимент: столов — не менее 40, стульев — не менее 130, бюро — не менее 30 и книжных шкафов — не более 10.

3. Решить задачу 1 при условии комплектности: количество столов относится к количеству стульев, как 1 : 6.

4. Заданы дополнительно цены: стол — 32 руб., стул — 15 руб., бюро — 12 руб. и книжный шкаф — 80 руб. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию, при единственном ограничении на ассортимент — условии комплектности столов и стульев 1 : 6.

5. Фабрика может дополнительно приобрести доски I типа по 12 коп./м и II типа по 8 коп./м. Кроме того, можно увеличить трудовые ресурсы за счет сверхурочной работы, производя дополнительную оплату каждого часа в сумме 80 коп. Определить в условиях задачи 1, увеличение какого из видов ресурсов более целесообразно.

Указание. Использовать оценки индексной строки, относящиеся к балансовым переменным.

206. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красители. В следующей таблице указаны мощности станков (в тыс. станко-ч), ресурсы пряжи и красителей (в тыс. кг), производительности станков по каждому виду пряжи (в м/ч), нормы расхода пряжи и краски (в кг на 1000 м) и цена (в руб.) 1 м ткани.

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и нормы расхода		
		1	2	3
Станки I типа	30	20	10	25
Станки II типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена		15	15	20

По этим исходным данным решить следующие задачи.

1. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию фабрики.

2. Приняв условие, что количество тканей трех артикулов должно находиться в отношении 2 : 1 : 3, определить, какое максимальное количество комплектов ткани может выпустить фабрика.

3. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 м ткани составляет соответственно 8, 5 и 15 руб.

4. Решить задачу 1 при условии, что станки I типа ткань 1-го артикула не производят.

5. Определить оценки всех четырех видов ресурсов относительно оптимального ассортимента, найденного в задаче 1.

§ 3. ЗАДАЧИ О «СМЕСЯХ»

207. (Постановка задачи.) Имеется p компонентов ($i = 1, 2, \ldots, p$), при сочетании которых в различных пропорциях образуются различные смеси.

В состав каждого компонента входят q веществ. Через a_{ik} и a_k обозначено количество k-го вещества ($k = 1, 2, \ldots, q$), которое входит в состав единицы i-го компонента и, соответственно, в единицу смеси. Предполагается, что a_k зависит от a_{ik} линейно, т. е. если смесь состоит из x_1 единиц 1-го компонента, x_2 единиц 2-го компонента и т. д., то

$$a_k = \sum_{i=1}^{p} a_{ik}x_i. \tag{3}$$

Заданы p чисел c_i, характеризующих цену, вес, калорийность и т. д. единицы i-го компонента, и q чисел b_k, указывающих минимально необходимое содержание k-го вещества в смеси. Требуется определить состав смеси (т. е. числа $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p$), для которой суммарная характеристика (цена, вес и т. д.) окажется наилучшей.

Решение. Из равенства (3) и условия обязательного минимального содержания каждого из веществ в смеси получим систему неравенств

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ik}x_i \geqslant b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{4}$$

Кроме того, очевидно,

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \qquad (5)$$

Наконец, суммарная характеристика смеси выразится равенством

$$z = \sum_{i=1}^{p} c_i x_i. \qquad (6)$$

Задача заключается в том, чтобы минимизировать функцию (6) при условиях (4) и (5). Для дальнейшего решения задачи можно использовать симплексный метод.

Замечания. 1. Кроме ограничений (4), по содержанию отдельных веществ в смеси, в задаче могут фигурировать ограничения по имеющимся запасам отдельных компонентов или по предельным нормам их включения в смесь. Могут задаваться также пропорции, в которых некоторые из компонентов должны входить в состав смеси.

2. Если известны условия изготовления компонентов с учетом имеющихся для этой цели ресурсов, то возникает более сложная объединенная задача составления оптимальной смеси, для которой будут с наибольшим эффектом использованы ресурсы в производстве компонентов. Так, например, при составлении рациона кормления можно определить оптимальную структуру посевов, обеспечивающих кормление имеющегося поголовья скота наилучшим образом.

Ресурсами в данном случае служат участки земли, на которых выращиваются различные компоненты, включаемые в рацион.

3. В случае когда, согласно п. 1, в систему ограничений включаются простейшие неравенства вида $x_i \leqslant di$, можно использовать специальный вычислительный метод (симплексный метод с учетом двусторонних ограничений), в котором простейшие неравенства в основную систему ограничений не вводятся. Однако можно эти же задачи решать и обычным симплексным методом.

208. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин *А* — 2 : 3 : 5 : 2, бензин *В* — 3 : 1 : 2 : 1 и бензин *С* — 2 : 2 : 1 : 3.

Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами: 120 руб., 100 руб. и 150 руб.

1. Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

2. Определить оптимальный план смешения из условия максимального использования компонентов.

209. В состав рациона кормления входят три продукта: сено, силос и концентраты, содержащие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Содержание питательных веществ (в г на 1 кг) соответствующего продукта питания и минимально необходимые нормы их потребления заданы следующей таблицей:

№	Питательные вещества / Продукты	Белок	Кальций	Витамины
1	Сено	50	6	2
2	Силос	20	4	1
3	Концентраты	180	3	1
	Нормы потребления	2000	120	40

Используя эти исходные данные, решить следующие задачи.

1. Определить оптимальный рацион кормления из условия минимальной стоимости, если цена 1 кг продукта питания соответственно составляет: сена — 3 коп., силоса — 2 коп. и концентратов — 5 коп.

2. Решить задачу 1, если заданы дополнительно предельные нормы суточной выдачи: сена — не более 12 кг, силоса — не более 20 кг и концентратов не более 16 кг.

3. Включить в задачу 2 условие ограниченности ресурсов продуктов на один рацион: сена — не более 10 кг, силоса — не более 15 кг и концентратов — не более 20 кг.

4. Определить влияние на минимальную стоимость рациона увеличения ресурсов сена и силоса на 1 кг и концентратов на 3 кг.

5. В найденном (в задаче 2) оптимальном рационе заменить 1 кг сена на силос или концентраты. Определить, при какой замене минимальная стоимость изменится наименьшим образом.

210. Животноводческая ферма составляет рацион кормления коров на зиму. Имеются два научно разработанных рациона *А* и *В* и произвольный рацион *С* следующих составов:

Рацион A	Не менее 40% кукурузного силоса, не более 40% кормовых трав
Рацион B	Не менее 30% кукурузного силоса, не более 50% кормовых трав
Рацион C	Корм без ограничения

Заданы следующие предельные нормы расхода каждого продукта, исходя из произведенных заготовок кормов: кукурузного силоса — 200 ц, кормовых трав — 300 ц.

Какое количество каждого из рационов должна составить ферма, чтобы получить максимальную прибыль, если при рационе A она составляет 10 руб./ц, при рационе B — 12 руб./ц, при произвольном рационе — 5 руб./ц?

211. Для кормления подопытного животного ему необходимо давать ежедневно не менее 15 ед. химического вещества A_1 (витамина или некоторой соли) и 15 ед. химического вещества A_2. Не имея возможности давать вещество A_1 или A_2 в чистом виде, можно приобретать вещество B_1 по 1 коп. или B_2 по 3 коп. за 1 кг, причем каждый килограмм B_1 содержит 1 ед. A_1 и 5 ед. A_2, а килограмм B_2 — 5 ед. A_1 и 1 ед. A_2.

Определить оптимальное содержание веществ B_1 и B_2 в ежедневном рационе.

212. Из четырех видов основных материалов (медь, цинк, свинец, никель) составляют три вида сплавов латуни: обычный, специальный и для художественных изделий. Цены единицы веса меди, цинка, свинца и никеля составляют 0,8 руб., 0,6 руб., 0,4 руб. и 1,0 руб., а единицы веса сплава, соответственно, 2 руб., 3 руб., 4 руб.

Сплав для художественных изделий должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца; специальный — не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав компоненты могут входить без ограничений.

Производственная мощность предприятия позволяет выпускать (за определенный срок) не более 400 ед. веса обычного сплава, не более 700 ед. веса специального сплава и не более 100 ед. веса декоративного сплава.

Найти производственный план, обеспечивающий максимальную прибыль.

§ 4. ЗАДАЧИ О «РАСКРОЕ»

213. (Постановка задачи.) На раскрой (распил, обработку) поступает s различных материалов. Требуется изготовить из них q различных изделий в количестве, пропорциональном числам $b_1, b_2, .., b_k, ..., b_q$.

Каждая единица j-го материала ($j = 1, 2, ..., s$) может быть раскроена p различными способами, причем использование i-го способа ($i = 1, ..., p$) дает a_{ik}^j единиц k-х изделий.

Найти план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов, если материалов j-го вида поступает a^j единиц.

Решение. Обозначим через x_i^j количество единиц j-го материала, раскраиваемых по i-му способу (всего таких переменных будет $p \cdot s$). Переменные x_i^j, очевидно, должны удовлетворять ограничениям:

$$x_i^j \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \dots, p \text{ и } j=1, 2, \dots, s), \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^j = a^j \ (j=1, 2, \dots, s), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{p} x_i^j a_{ik}^j = b_k x \ (k=1, 2, \dots, q), \tag{9}$$

где x — число комплектов изготавливаемых изделий.

Задача заключается в максимизации $z = x$ при условиях (7), (8) и (9).

Дальнейшее решение задачи проводится симплексным методом. В частном случае, когда на обработку поступает материал только одного образца (т. е. $s = 1$), в количестве a ед., модель принимает более простой вид: максимизировать $z = x$ при условиях:

$$x_i \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \dots, p), \tag{7'}$$

$$\sum_i x_i = a, \tag{8'}$$

$$\sum_i a_{ik} x_i = b_k x \quad (k=1, 2, \dots, q). \tag{9'}$$

214. Для изготовления брусьев трех размеров: 0,6 м, 1,5 м и 2,5 м в соотношении 2 : 1 : 3 на распил поступают бревна длиной в 3 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Решение. Прежде всего определим всевозможные способы распила бревен, указав сколько соответствующих брусьев при этом получается.

Способы распила (i)	Получаемые брусья			Количество бревен, распиленных по i-му способу
	0,6	1,5	2,5	
1	5	—	—	x_1
2	2	1	—	x_2
3	—	2	—	x_3
4	—	—	1	x_4

Теперь составляем математическую модель, приняв, что всего поступает на распил a бревен: максимизировать число комплектов $z = x$ при условиях, что все бревна должны быть распилены ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$) и что число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности

$$5x_1 + 2x_2 = 2x; \quad x_2 + 2x_3 = 1 \cdot x; \quad x_4 = 3x.$$

Из последнего равенства, определив $x = \frac{1}{3} x_4$ и исключив x из остальных выражений, придем окончательно к следующей задаче:

$$z = \frac{1}{3} x_4 \,(\max),$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ 5x_1 + 2x_2 - \frac{2}{3} x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - \frac{1}{3} x_4 = 0 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0.$$

После решения ее симплексным методом получим оптимальное решение задачи $X_{\text{опт}} = (4/39, 5/39, 0, 10/13)$ и $z_{\max} = 10/39$.

Таким образом, 10,2% общего числа поступающих бревен следует распиливать по 1-му способу, 12,8% — по 2-му способу и 77% — по 3-му способу; 4-й способ распила применять не следует.

215. Определить по данным задачи 214 оптимальный план распила, если на обработку поступают также 2-метровые бревна, причем соотношение между 3- и 2-метровыми бревнами составляет 1 : 3.

216. Произвести распил 5-метровых бревен на брусья размерами 1,5; 2,4 и 3,2 м в отношении 2 : 3 : 5 так, чтобы минимизировать общую величину отходов.

217. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая — 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты, включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в следующей таблице.

Первая партия				Вторая партия		
Способ раскроя / Детали	1	2	3	Способ раскроя / Детали	1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального числа комплектов.

§ 5. ОБЩАЯ ПЛАНОВО-ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ЗАДАЧА. ВЫБОР ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПОСОБОВ ПРОИЗВОДСТВА

Многие из ранее приведенных задач, а также ряд других планово-производственных задач укладываются в следующую общую задачу линейного программирования.

218. (Постановка задачи.) Некоторый производственный процесс может вестись в p различных технологических режимах (способах организации производства, способах обработки, раскроя и т. д.). В рассматриваемом процессе участвуют q производственных факторов (изделий, ресурсов и т. д.). Пусть a_{ik} означает объем производства k-го фактора ($k = 1, 2, \ldots, q$), при применении i-го технологического режима ($i = 1, 2, \ldots, p$) с единичной интенсивностью. При этом если $a_{ik} > 0$, то i-й фактор производится (например, изделия, продукты и т. д.), а если $a_{ik} > 0$, то соответствующий фактор расходуется (например, ресурсы, сырье и т. д.).

Обозначим через $b_k > 0$ потребность в k-м факторе, если он производится, и через $b_k < 0$ — ресурсы k-го фактора, если он расходуется. Таким образом, с помощью введения чисел a_{ik} и b_k со знаками «+» или «—» устанавливается как бы формальное равноправие между ресурсами и потребностями.

Обозначим, наконец, через c_i оценку результата применения i-го технологического режима единичной интенсивностью. Определить производственный план, задаваемый величинами интенсивностей всех технологических способов, суммарная оценка которого будет наилучшей.

Решение. Обозначим через x_i интенсивность, с которой применяется i-й технологический режим. Тогда переменные x_i должны удовлетворять следующим двум видам ограничений:

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{10}$$

$$\sum_i a_{ik} x_i \geqslant b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{11}$$

В случае когда k-й фактор есть производимый продукт, выражение (11) представляет собой ограничение по потребностям. Если же k-й фактор есть расходуемый вид ресурсов, то в соответствии с принятым условием $a_{ik} \leqslant 0$ и $b_k < 0$, и поэтому неравенство (11) перепишется в виде $\Sigma \mid a_{ik} \mid x_i \leqslant \mid b_k \mid$, что соответствует по характеру обычным ограничениям по ресурсам.

Суммарная оценка всего производственного процесса может быть получена с помощью формулы

$$z = \sum_i c_i x_i, \tag{12}$$

запись которой предполагает, что оценки каждого технологического способа пропорциональны интенсивности его применения, а при использовании нескольких способов суммируются.

Задача заключается в том, чтобы максимизировать (или минимизировать) функцию (12), при условиях (10) и (11). Указанная модель задачи, очевидно, в общем случае должна исследоваться общими вычислительными методами.

Нетрудно видеть, что некоторые из ранее рассмотренных задач являются частными случаями данной, если соответственно истолковать такие понятия, как «факторы производства» и «технологические способы» в конкретных терминах данной задачи.

В то же время указанная задача может непосредственно фигурировать как задача нахождения оптимального сочетания интенсивностей различных технологических режимов (способов производства).

219. Имеются три технологических процесса (I, II и III), связанных с производством некоторого продукта и потреблением при этом четырех видов сырья.

Сырье Продукты	1	2	3	4	c_i
	Расход сырья				
I	5	8	3	6	10
II	4	3	9	5	15
III	6	7	4	2	8
	50	50	20	60	

Пусть c_i означает цену продукта, полученного в результате применения i-го процесса с единичной интенсивностью, b_k — ресурсы k-го вида сырья и a_{ik} — расход k-го вида сырья при i-м процессе с единичной интенсивностью.

Определить интенсивности использования каждого процесса из условия обеспечения максимума товарной продукции.

220. Предприятие может выпускать продукцию по трем технологически отработанным способам производства. При этом за 1 ч по 1-му способу производства оно выпускает 20 ед. продукции, по 2-му — 25 ед. и по 3-му — 30 ед. продукции.

Количество производственных факторов, расходуемых за час при различных способах производства, и располагаемые ресурсы этих факторов представлены в следующей таблице:

Факторы Способ производства	Сырье	Станочный парк	Рабочая сила	Энергия	Транспорт	Прочие расходы
1	2	3	7	2	1	4
2	1	4	3	1	0	2
3	3	2	4	3	1	1
Располагаемые ресурсы факторов	60	80	70	50	40	50

Спланировать работу предприятия из условия получения максимума продукции, если известно, что общее время работы предприятия составляет 30 ч.

221. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам, причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 ед. времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырье, электроэнергия, зарплата и накладные расходы.

Затраты соответствующих факторов в рублях при работе по разным технологическим процессам в течение 1 ед. времени указаны в следующей таблице:

№ технологических процессов / Производственные факторы	1	2	3	4	5	Ресурсы
Сырье	12	15	10	12	11	1300
Электроэнергия	0,2	0,1	0,2	0,25	0,3	30
Зарплата	3	4	5	4	2	400
Накладные расходы	6	5	4	6	4	800

В последней графе таблицы указаны ресурсы, которыми располагает предприятие по каждому из производственных факторов.

Найти программу максимального выпуска продукции.

222. Механический завод при изготовлении трех разных типов деталей использует токарные, фрезерные и строгальные станки. При этом обработку каждой детали можно вести тремя различными технологическими способами.

В следующей таблице указаны ресурсы (в станко-ч) каждой группы станков, нормы расхода времени при обработке детали на соответствующем станке по данному технологическому способу и прибыль от выпуска единицы детали каждого вида.

Детали		I		II			III			Ресурсы времени
Технологические способы		1	2	1	2	3	1	2	3	
Станки	Токарный	0,4	0,9	0,5	0,3	—	0,7	—	0,9	250
	Фрезерный	0,5	—	0,6	0,2	0,5	0,3	1,4	—	450
	Строгальный	0,3	0,5	0,4	1,5	0,3	—	1,0	0,5	600
Прибыль		12		18			30			

1. Составить оптимальный план загрузки производственных мощностей, обеспечивающий максимальную прибыль.

2. Считая, что между количеством выпускаемых деталей должно выполняться соотношение комплектности 1 : 2 : 1, определить производственную программу, обеспечивающую изготовление максимального числа комплектов.

3. Решить задачу 1, если число деталей II типа должно не превышать 100 ед.

4. Сформулировать данную задачу на языке общей планово-производственной задачи.

223. Нефтеперерабатывающий завод располагает 10 ед. нефти сорта *A* и 15 ед. сорта *B*. При переработке нефти получаются бензин и мазут. При этом известны следующие три способа переработки:

Способы переработки	Результат	
	Мазут	Бензин
$1A+2B$	2	3
$2A+1B$	5	1
$2A+2B$	2	1
Цена за единицу	2	10

Найти наиболее выгодный план переработки, дающий максимум товарной продукции.

§ 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ВО ВРЕМЕНИ. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ЗАПАСОВ

224. (Постановка задачи.) Планируется производство однородного продукта для удовлетворения потребностей, меняющихся во времени. Весь годичный период разбит на n периодов. Потребности на продукт в i-м периоде составляют b_i. Известны также затраты на выпуск дополнительной единицы продукта (a руб.) и на хранение той же единицы в течение одного периода (c руб.). Составить оптимальный график производства по периодам, минимизирующий суммарные затраты.

Решение. Обозначим через $x_i \geqslant 0$ выпуск продукции за i-й период, а через u_i запасы, которые образуются в конце i-го периода за счет превышения накопленного выпуска продукции, начиная с 1-го периода до данного, над накопленным расходом.

Пусть к началу планируемого периода выпуск продукции составляет x_0 единиц.

Средний размер запасов, хранящихся в течение i-го периода, составит $1/2\ (u_{i-1}+u_i)$. Поэтому расходы на хранение за весь планируемый период будут составлять

$$z_{\text{хр}} = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{n} (u_{i-1}+u_i).$$

Введем две новые неотрицательные переменные y_i и z_i из соотношений

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \quad (i=2, 3, \ldots, n).$$

При этом в оптимальном графике производства можно y_i трактовать как величину, на которую произошло расширение производства в i-м периоде, а z_i — соответственно как свертывание производства. Исходя из этого, суммарные дополнительные затраты на расширение производства запишутся в виде

$$z_{\text{расш}} = a \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Таким образом, приходим окончательно к следующей модели задачи линейного программирования: минимизировать функцию

$$z = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{n} (u_{i-1}+u_i) + a \sum_{i=2}^{n} y_i \tag{13}$$

при условиях:

$$y_i \geqslant 0, \quad z_i \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \quad (i=2, 3, \ldots, n), \tag{15}$$

$$u_i = u_0 + \sum_{i=1}^{i} x_i - \sum_{i=1}^{i} b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

$$u_i \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Модель можно упростить, исключив из нее переменные x_i. Для этого вычтем из уравнения (16) аналогичное уравнение для $i-1$. Получим

$$u_i-u_{i-1}=\sum^{i} x_i-\sum^{i-1} x_i-\sum^{i} b_i+\sum^{i-1} b_i=x_i-b_i.$$

Аналогично, очевидно, $u_{i-1}-u_{i-2}=x_{i-1}-b_{i-1}$, откуда почленным вычитанием из предыдущего равенства получаем

$$x_i-x_{i-1}=u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}+b_i-b_{i-1}.$$

Подставляя это выражение в левую часть равенств (15), запишем их в виде

$$u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}+b_i-b_{i-1}=y_i-z_i, \quad (i=1, \ldots, n). \qquad (15')$$

Дальнейшее решение задачи, описанной выражениями (13), (14), (15'), (17), ведется как обычно.

225. Планируется поквартальный выпуск продукции для удовлетворения переменного спроса ($b_1=50$, $b_2=30$, $b_3=40$, $b_4=20$).

Составить оптимальный график работы предприятия, если затраты на дополнительный выпуск 1 ед. продукции составляют 30 руб., а затраты на хранение той же единицы в запасах в течение одного периода — 3 руб. При этом задано $u_0=5$.

Решение. Согласно рассмотренной выше общей модели, обозначим соответственно выпуски продукции в I, II, III и IV кварталах через x_1, x_2, x_3 и x_4, запасы продукции через u_1, u_2, u_3, u_4, объем роста производстве в i-м квартале через y_i и объем свертывания через z_i.

Тогда выражения (13) — (17) приобретут следующий конкретный вид: минимизировать функцию

$$z=\frac{3}{2}(5+2u_1+2u_2+2u_3+u_4)+30(y_2+y_3+y_4) \qquad (13')$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} u_2-2u_1+5-20&=y_2-z_2\\ u_3-2u_2+u_1+10&=y_3-z_3\\ u_4-2u_3+u_2-20&=y_4-z_4 \end{aligned}\right\}, \qquad (15')$$

$$u_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \qquad (17')$$

Решение этой задачи с помощью симплексных таблиц дает следующий результат:

$$u_2=5,\quad u_4=15,\quad z_2=10,\quad u_1=u_3=y_2=y_3=y_4=z_2=z_4=0$$

и

$$z_{\min}=45 \text{ руб.}$$

С помощью равенств (15) и (16) определяем значения x_i:

$x_1=b_1+u_1-u_0=45$; $\quad x_2=x_1-z_2=35$; $\quad x_3=x_2=35$; $\quad x_4=x_3=35$.

226. Решить ту же задачу, приняв дополнительно условие, что к концу планируемого периода запасов не остается.

227. Решить задачу 225, если сокращение производства также сопряжено с затратами, составляющими 20 руб. на единицу продукции.

228. Найти оптимальный график производства по двухмесячным периодам для удовлетворения переменного спроса $b_1 = 50$, $b_2 = 30$, $b_3 = 40$, $b_4 = 35$, $b_5 = 60$, $b_6 = 30$, если затраты на хранение 1 ед. продукции в течение двух месяцев составляют 5 руб., а затраты на расширение производства — 16 руб. на 1 ед. продукции. Принять $u_0 = 0$ и $u_6 = 0$.

229. Решить ту же задачу, если $u_0 = 15$ и u_6 — произвольное.

230. Склад вместимостью в 100 ед. сезонного продукта содержит к началу планируемого периода 30 ед. Определить, сколько требуется покупать и продавать в течение каждого из рассматриваемых четырех кварталов для получения максимума прибыли, если цена приобретенной единицы к концу квартала составляет 5, 7, 4, 9, а цена проданной единицы в течение квартала соответственно равна 10, 8, 5, 10.

231. Для удовлетворения поквартального переменного спроса в некоторых изделиях $b_1 = 30$, $b_2 = 70$, $b_3 = 40$, $b_4 = 20$, предприятие располагает двумя возможностями; применять три дневные смены, во время каждой из которых предприятие может выпускать 20 ед. изделий в квартал, и две ночные с производительностью 15 ед. в квартал каждая.

Затраты на 1 ед. продукции в дневную смену составляют 150 руб. а в ночную смену — 200 руб. Определить оптимальный график работы предприятия, минимизирующий себестоимость продукции, если запасы продукции к началу и концу планируемого периода равны нулю, а расходы по хранению в течение квартала составляют 100 руб. на 1 ед. продукции.

§ 7. ОПТИМАЛЬНЫЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

232. (Постановка задачи.) Рассматривается n-отраслевая балансовая модель в стоимостном выражении с постоянными «технологическими» коэффициентами, задаваемыми матрицей затрат $A = \|a_{ik}\|$, где a_{ik} —

затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции k-й отрасли. Определить оптимальный валовой выпуск каждой отрасли, при котором будет достигнут максимальный суммарный выпуск конечного продукта в стоимостном выражении, если производственные возможности i-й отрасли ограничивают ее валовой выпуск величиной d_i (где $i = 1, 2, \ldots, n$) и цены на конечный продукт задаются вектором $\bar{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots \ldots, c_n)$.

Решение. Обозначим через $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ и $\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ векторы, характеризующие соответственно валовой выпуск продукции всех отраслей и конечный продукт. Тогда между векторами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ существует следующее соотношение (см. гл. II):

$$\bar{X} = S \cdot \bar{Y}, \quad \text{где} \quad S = (E - A)^{-1}.$$

Поэтому математическая модель задачи может быть сформулирована так: максимизировать функцию

$$z = \bar{C} \cdot \bar{Y} \tag{18}$$

при условиях

$$S \cdot \bar{Y} \leqslant D, \tag{19}$$

$$\bar{Y} \geqslant 0, \tag{20}$$

где $D = (d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_k)$ и векторные неравенства означают, что каждая составляющая соответствующих векторов удовлетворяет аналогичному неравенству.

Дальнейшее решение задачи ведется обычными приемами.

Замечание. В задаче могут быть дополнительно указаны ограничения, налагаемые на конечный продукт в виде ассортиментного ограничения ($y_1 : y_2 : \ldots = b_1 : b_2 : \ldots$) и ограничений сверху или снизу ($y_i \leqslant b_i$ или $y_i \geqslant b_i$).

233. Имеется трехотраслевая балансовая модель с матрицей коэффициентов затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Производственные мощности отраслей ограничивают возможности ее валового выпуска числами 300, 200, 500. Определить оптимальный валовой выпуск всех отраслей, максимизирующий стоимость суммарного конечного продукта, если задан вектор цен на конечный продукт: $\bar{C} = (2, 5, 1)$.

234. Решить ту же задачу, если на конечный продукт накладываются следующие ограничения: $y_1 : y_3 = 2 : 1$ и $y_2 \leqslant 100$.

235. Дополнительно к данным задачи 233 заданы коэффициенты прямых затрат труда на выпуск 1 ед. продукции каждой отрасли: 0,2; 0,3; 0,15. Определить максимально возможный выпуск конечного продукта в стоимостном выражении, если суммарные затраты труда не должны превышать 70 ед.

236. Трехотраслевая балансовая модель в стоимостном выражении характеризуется матрицей коэффициентов прямых затрат:

$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0 & 0,1\\ 0,1 & 0,4 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0\end{pmatrix}.$$

Известно, что для увеличения в будущем году валового выпуска 1, 2, 3-й отраслей на 1 ед. необходимо затратить капиталовложений: в 1-ю отрасль — 0,6; во 2-ю отрасль — 0,2 и в 3-ю отрасль — 0,1. Определить оптимальное распределение капиталовложений, обеспечивающее максимальный прирост конечного продукта в следующем году, если размеры капиталовложений в соответствующие отрасли ограничены числами 100, 50 и 60, а стоимости единицы конечного продукта соответственно равны 1, 5 и 4.

237. Решить ту же задачу, если задано ассортиментное ограничение на прирост конечного продукта: $\Delta y_1 : \Delta y_2 : \Delta y_3 = 5 : 1 : 2$.

238. Рассматривается трехотраслевая балансовая модель в стоимостном выражении с матрицей коэффициентов прямых затрат

$$A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,1 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,4 & 0\end{pmatrix}.$$

Для расширенного воспроизводства в будущем году в каждой из отраслей созданы дополнительно орудия труда в сумме соответственно 120, 50 и 80 ед. Эти величины могут быть использованы как капиталовложения для расширенного воспроизводства отраслей на следующий год. При этом известна матрица коэффициентов капитальных затрат

$$K=\|k_{ik}\|=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,05 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix},$$

где k_{ik} означает необходимые затраты орудий труда, созданных i-й отраслью для дополнительного выпуска продукции k-й отрасли на 1 ед. (все данные указаны в денежных единицах). Определить оптимальное распределение капиталовложений, обеспечивающее максимальный суммарный прирост конечного продукта при следующих ценах на него: 2, 3, 1.

239. Решить предыдущую задачу при следующем ассортиментном ограничении на прирост конечного продукта: $\Delta y_1 : \Delta y_3 = 2 : 1$.

§ 8. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

240. Для изготовления определенного сплава из свинца, цинка и олова используется сырье в виде следующих пяти сплавов из тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью 1 кг.

Сплав / Компоненты	Содержание в %				
	I	II	III	IV	V
Свинец	10	10	40	60	30
Цинк	10	30	50	30	20
Олово	80	60	10	10	50
Стоимость	4	4,5	5,8	6,0	7,5

1. Определить, сколько нужно взять сплава каждого вида, чтобы изготовить с минимальной себестоимостью сплав, содержащий 20% свинца, 30% цинка и 50% олова.

2. Решить ту же задачу, если для нового сплава задаются следующие ограничения: олова от 40 до 60% и цинка от 20 до 30%.

3. Решить ту же задачу при следующих ограничениях на состав сплава: олова — не более 40% и цинка — не менее 20%. Решение найти, используя переход к двойственной задаче.

241. Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны 5 типовых проектов. По каждому из проектов известны: длительность закладки фундаментов и строительства остальной части здания в днях, а также жилая площадь дома и стоимость 1 кв. м жилой площади.

Тип дома	I	II	III	IV	V
Фундамент	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь	3000	2000	5000	4000	6000
Стоимость 1 кв. м	200	150	220	180	200

Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий.

1. Определить план строительства, обеспечивающий ввод максимальной жилой площади в течение года (300 рабочих дней).

2. Решить ту же задачу при дополнительном ограничении: число домов каждого типа должно оказаться не менее чем 10.

3. Определить годовой план строительства, максимизирующий суммарную жилую площадь при дополнительном условии, что средняя себестоимость 1 кв. м не превышает 180 руб.

242. Обработка деталей *А*, *В* и *С* может производиться на трех станках (I, II, III). В следующей таблице указаны нормы затраты времени на обработку станком соответствующей детали, продажная цена единицы детали (в руб.), оплата 1 ч работы станка и предельное время работы станка.

Детали Станки	Нормы времени			Оплата	Время работы станка
	А	*В*	*С*		
I	0,2	0,1	0,05	30	40
II	0,6	0,3	0,2	10	60
III	0,2	0,1	0,4	20	30
Цена	10	16	12		

На основании следующих дополнительных указаний составить математическую модель по определению оптимальной производственной программы, предполагая в задачах 1) — 10), что любая деталь может производиться на любом из станков, а в задачах 11) — 17), что каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков:

1) максимум товарной продукции (Т);

2) максимум суммарной прибыли (П);

3) минимум суммарных затрат на обработку (S) при плане *A* — 300, *B* — 500, *C* — 100 шт.;

4) максимум числа комплектов, включающих 3 детали *A*, 2 детали *B* и 1 деталь *C*;

5) максимум П при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

6) максимум П при заданном количестве деталей *A* (200), *B* (400), *C* (600);

7) максимальная загрузка станков при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

8) максимальное число деталей *A*, *B* и *C* при одинаковом времени работы всех станков;

9) максимум П при дополнительных условиях, что каждый станок загружен производством только одной детали и что план предусматривает производство всех трех деталей;

10) максимум суммарной производительности при дополнительных условиях задачи 9) и равном времени работы всех станков.

11) максимум П;

12) максимум Т;

13) максимум П при дополнительных условиях: деталей *A* не менее 300 ед., деталей *B* не более 200 ед.;

14) максимум Т при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

15) минимум S при заданном ассортименте 1 : 2 : 3;

16) оценить в задаче 11) влияние на $\text{П}_{\max}$ увеличения ресурсов времени по каждому станку;

17) то же в задаче 12).

243. Для контроля за работой космической ракеты используются 4 вида датчиков, которые помещены на ракете и результаты измерений которых регистрируются тремя типами наземных регистраторов-самописцев. Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и т. д.) и передает результаты по отдельному каналу связи на любой самописец. В следующей таблице указаны численности датчиков и самописцев, а также время, затрачиваемое на включение соответствующего канала связи:

Датчики Самописцы	20	40	50	40
70	2	1	5	3
90	3	2	3	4
60	3	4	1	2

Определить оптимальное закрепление датчиков к регистрирующим устройствам, при котором достигается минимум суммарных затрат времени на переключение каналов.

244. Из пункта *A* в пункт *B* и обратно отправляются 4 поезда согласно следующему расписанию; из *A* в *B*: 9^{00}, 12^{00}, 16^{00} и 20^{00}; из *B* в *A*: 10^{00}, 15^{00}, 18^{00} и 22^{00}.

Время в пути для всех поездов одинаково и равно 5 ч. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки два рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, и второй обратно с ближайшим очередным рейсом. Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами *A* и *B*, при котором достигается минимум суммарного времени простоя локомотивов (*T*).

245. Расход газа в городе характеризуется двумя величинами: суммарный расход за год (*A*) и среднемесячный расход за зимний период (*B*). Для удовлетворения потребностей в газе могут быть построены газохранилища трех типов (I, II, III), для каждого из которых известны те же две характеристики (a_i и b_i). Известны также капитальные затраты на строительство каждого газохранилища и суммарный объем капиталовложений на организацию газоснабжения. Определить оптимальный план строительства газохранилищ, обеспечивающий удовлетворение потребностей в газе при минимальной его себестоимости, по конкретным данным, приведенным в следующей таблице:

Типы газохранилищ	I	II	III	Всего
Годовая потребность (производительность)	50	100	50	2500
Среднемесячная потребность (производительность)	20	30	10	500
Себестоимость 1 м^3	1	0,8	0,8	
Капиталовложения	120	90	180	3600

Решить задачу путем перехода к двойственной задаче и дать экономическое толкование полученным значениям двойственных переменных.

246. Для удовлетворения переменного спроса по кварталам применяется, кроме нормального режима работы, сверхурочная работа в количестве, не превышающем 25% времени основной работы и выпуска продукции на дополнительном оборудовании в количестве не более чем 20% от основной продукции. Кроме того, излишек продукции в данном квартале может храниться в виде запасов. Исходные данные задачи приведены в следующих таблицах:

Кварталы	I	II	III	IV
Спрос	140	120	200	140
Выпуск при норм. режиме работы	100	80	120	100

Затраты на единицу продукции			
Норм. работы	Сверхур. работы	Дополн. оборуд.	Хранение
5	8	10	3

Определить оптимальный режим работы предприятия, удовлетворяющий спрос с минимальными затратами при следующих условиях:

1) начальный и конечный запасы равны;
2) начальный запас равен 20 ед., а конечный равен нулю;
3) начальный запас равен 20 ед., а конечный не задан;
4) начальный и конечный запасы произвольные.

247. Предприятие выпускает два продукта ($k = 1, 2$) для удовлетворения спроса b_k^j, меняющегося по полугодиям ($j = 1, 2$). Изготовление продуктов может производиться на трех машинах ($i = 1, 2, 3$), для которых известно время t_{ik}, затрачиваемое i-й машиной на производство единицы k-го продукта и суммарный резерв времени a_i^j, которым располагает i-я машина в j-м полугодии. Известны также затраты c_k на хранение единицы k-го продукта в течение полугодия. Все указанные величины приведены в следующей таблице:

t_{ik}			a_i^j			b_k^j			c_k
	I	II		I	II		I	II	
1	2	1	1	70	80	1	20	30	3
2	2	3	2	100	60	2	30	40	5
3	4	2	3	120	100				

Определить оптимальную производственную программу из условия минимизации затрат на хранение.

248. (Задача о поставщике.) Для обслуживания автоперевозок в j-й день недели требуется a_j автомашин. Машины после поездки должны пройти профилактический ремонт. Обычный ремонт длится 4 дня при затратах 20 руб. на машину, срочный ремонт длится 2 дня при затратах 30 руб. на машину. Кроме того, можно использовать для перевозок машины, сняв их с другого участка, что приведет к потерям в 50 руб. на машину. Определить оптимальную недельную программу подготовки машин, минимизирующую суммарные затраты автобазы, если потребности в машинах характеризуются следующими данными:

Дни недели	1	2	3	4	5	6	7
a_j	50	40	70	60	80	40	50

249. (Задача о складе.) Склад емкостью в 200 ед. товара используется для хранения продукции и отпуска товаров в торговую сеть. Предполагается, что поступление товаров на склад производится в конце каждого квартала, а продажа — в течение всего квартала. Затраты на изготовление и хранение, а также отпускная цена 1 ед. товара по кварталам указаны в следующей таблице:

Кварталы	Затраты		Отпускная цена
	Изготовление	Хранение	
I	8	5	20
II	12	4	16
III	10	7	15
IV	15	6	18

Предполагая спрос неограниченным, определить оптимальную ежеквартальную программу изготовления, хранения и продажи товаров, максимизирующую суммарную прибыль за год, при следующих условиях:

1) начальные запасы равны нулю;

2) начальные и конечные запасы равны нулю;

3) начальные и конечные запасы равны 250 ед.;

4) решить задачу 1) при дополнительном ограничении: ежеквартально можно изготовить не более чем 500 ед.

250. Колхоз может продать часть своего урожая пшеницы и посеять остаток. При этом урожай составляет 20 ц с га на каждые посеянные 10 кг. Кроме того, известны цены, по которым он может продать центнер пшеницы за 4 последовательных года (7, 8, 10 и 6 руб.). Определить оптимальную стратегию для колхоза на указанные 4 года, при которой будет достигнута максимальная прибыль.

251. (Транспортная задача с промежуточными пунктами.) Имеются всего 5 пунктов ($i = 1, \ldots, 5$), включенных в общую транспортную сеть. Для каждого из пунктов указаны объем производства a_i и объем потреблений b_k. Заданы также коэффициенты c_{ik} затрат на перевозки из i-го пункта в k-й. Все указанные данные приведены в следующей таблице:

k i	1	2	3	4	5	a_i	b_k
1		7	3	9	4	40	15
2	7		8	4	5	60	100
3	4	2		6	4	20	20
4	5	1	9		7	70	20
5	5	2	9	2		40	30

Составить оптимальный план перевозок, минимизирующий суммарные затраты.

252. Для обслуживания четырех авиалиний имеются три типа самолетов. В следующей таблице указано число самолетов i-го типа (a_i), количество пассажиров, которые отправляются по k-й линии (b_k), эксплуатационные расходы на один самолет i-го типа на k-й линии (c_{ik}) и общее число пассажиров, которое может перевезти за данный период i-й тип самолета на k-й линии (λ_{ik}):

	Авиалинии			
	20 000	10 000	15 000	40 000
15	5 500	7 1200	20 1000	12 2200
10	9 750	4 1800	8 1500	10 3300
25	6 1000	8 2450	4 2000	5 4350

c_{ik} λ_{ik}

Определить оптимальное распределение самолетов по авиалиниям, минимизирующее суммарные расходы.

253. В угольном бассейне добывается уголь трех сортов в относительных долях 20%, 60%, 15%. Добытый уголь доставляется четырем энергетическим установкам. Заданы теплотворные способности каждого из сортов топлива (в ккал/кг): 2800, 3000, 3500; потребности установок (в млн. ккал): 10, 25, 15, 30 и затраты по добыче 1 т каждого сорта (в руб.): 8, 10, 15.

Определить требуемый объем добычи и распределение разных сортов угля между энергетическими установками из условия минимизации суммарных затрат.

ГЛАВА IX

Элементы теории игр

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассматриваются конечные парные игры с нулевой суммой. Игрок A располагает p чистыми стратегиями $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_p$, а игрок B — соответственно q чистыми стратегиями $B_1, \ldots, B_k, \ldots, B_q$. Первый игрок может выбрать любую стратегию A_i, в ответ на которую второй игрок может выбрать любую стратегию B_k. Сочетание этих стратегий (A_i, B_k) приведет к некоторому числовому результату («платежу»), который обозначим через a_{ik} и будем называть его «выигрышем» игрока A. Игра с «нулевой суммой» означает, что при этом «выигрыш» игрока B составит $-a_{ik}$ (числа a_{ik} могут быть и отрицательными, поэтому слово «выигрыш» взято в кавычки). Матрица $\Pi = \| a_{ik} \|$ порядка $p \times q$ называется **платежной матрицей, или матрицей игры:**

B_k A_i		Стратегии игрока B					$\alpha_i = \min\limits_k a_{ik}$
		B_1	…	B_k	…	B_q	
Стратегии игрока A	A_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1q}	α_1
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	A_i	a_{i1}	…	a_{ik}	…	a_{iq}	α_i
	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	A_p	a_{p1}	…	a_{pk}	…	a_{pq}	α_p
$\beta_k = \max\limits_i a_{ik}$		β_1	…	β_k	…	β_q	α β

Числа $\alpha_i = \min\limits_k a_{ik}$ и $\beta_k = \max\limits_i a_{ik}$ указывают минимально гарантированный выигрыш для игрока A, применяющего стратегию A_i, и минимально гарантированный проигрыш игроком B при использовании им стратегии B_k.

Величина

$$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i (\min\limits_k a_{ik}) \qquad (1)$$

называется **нижней ценой игры, максиминным** выигрышем A, или коротко **максимином**, а соответствующая ему стратегия (строка) — **максиминной.** Аналогично

$$\beta = \min\limits_k \beta_k = \min\limits_k (\max\limits_i a_{ik}) \qquad (2)$$

называется **верхней ценой игры, минимаксным** проигрышем B, или **минимаксом**, а соответствующая стратегия игрока B — **минимаксной.** Всегда $\alpha \leqslant \beta$.

Принцип, согласно которому игроки выбирают эти стратегии, называется **принципом максимина** (для A) или **минимакса** (для B).

Если игрок A выбирает свою максиминную стратегию, то при любой стратегии, выбираемой игроком B, ему обеспечивается выигрыш не менее чем α. Аналогично для игрока B, при выборе им стратегии, при которой достигается $\beta = \min\limits_k \beta_k$, обеспечивается проигрыш (или выигрыш игрока A) не более чем β.

Если $\alpha = \beta$, то игра называется с **седловой точкой**, а общее значение α и β, которое будем обозначать через v — **ценой игры.**

В этом случае **оптимальным решением** игры для обоих игроков является выбор максиминной (для A) и минимаксной (для B) стратегий. Любое отклонение для каждого игрока от этих стратегий не может оказаться выгодным.

254. Игра заключается в том, что игрок A записывает числа 1 (стратегия A_1), или 2 (A_2), или 3 (A_3). Игрок B, в свою очередь, может записать числа 1 (B_1), 2 (B_2), 3 (B_3), или 4 (B_4).

Если оба числа окажутся равной четности, то A выигрывает сумму этих чисел, если — разной четности, то B выигрывает сумму этих чисел. Составить платежную матрицу, определить верхнюю и нижнюю цену игры и минимаксные стратегии.

Решение. Согласно условию, платежная матрица игры имеет следующий вид:

B_k A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	−3	4	−5	$\boxed{-5}$
A_2	−3	4	−5	6	$\boxed{-5}$
A_3	4	−5	6	−7	−7
β_k	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	6	6	−5 4

Нижняя цена игры: $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = -5$;

верхняя цена игры: $\beta = \min\limits_k \beta_k = 4$.

Следовательно, для игрока A максиминными стратегиями являются A_1 или A_2, при которых ему обеспечен «выигрыш» не менее -5 (т. е. проигрыш не более 5).

Для игрока B соответственно минимаксными стратегиями являются B_1 или B_2, которые обеспечивают ему проигрыш не более 4.

Игра не имеет седловой точки ($\alpha < \beta$).

255. Для следующих платежных матриц определить нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловых точек. В последнем случае определить оптимальное решение игры.

$$1) \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае применяют смешанные стратегии.

Смешанной стратегией игрока A называется применение им своих чистых стратегий $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_p$ с частостями $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p$ (причем $\sum x_i = 1$). Ее записывают в виде

$$\begin{pmatrix} A_1, & \ldots, & A_i, & \ldots, & A_p \\ x_1, & \ldots, & x_i, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \overline{X} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p).$$

Аналогично вектором

$$\overline{Y}(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_q) \quad (\Sigma y_k = 1)$$

определяется смешанная стратегия игрока B, где y_k есть частость использования стратегии B_k. Чистые стратегии являются частным случаем смешанной стратегии, задаваемой единичным вектором.

Функцией выигрыша, или платежной функцией $f(\overline{X}, \overline{Y})$ игры с матрицей $\Pi = \| a_{ik} \|$ при применении игроком A смешанной стратегии $\overline{X}$, а игроком B — смешанной стратегии $\overline{Y}$, называется средняя величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B), подсчитываемая по формуле

$$f(\overline{X}, \overline{Y})=\sum_i \sum_k x_i y_k a_{ik}=\overline{X}\Pi\overline{Y}. \qquad (3)$$

Стратегии $\overline{X}^*$ и $\overline{Y}^*$ называются **оптимальными**, если выполняются неравенства

$$f(\overline{X}, \overline{Y}^*)\leqslant f(\overline{X}^*, \overline{Y}^*)\leqslant f(\overline{X}^*, \overline{Y}), \qquad (4)$$

т. е. если их применение обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем при применении им любой другой стратегии $\overline{X}$, и игроку B средний проигрыш, не больший, чем при применении им любой другой стратегии $\overline{Y}$.

Совокупность оптимальных стратегий $(\overline{X}^*, \overline{Y}^*)$ называется **оптимальным решением**, или просто **решением игры**, а значение платежной функции при этом — ценой игры v:

$$v=f(\overline{X}^*, \overline{Y}^*). \qquad (5)$$

Фундаментальная теорема Неймана утверждает, что *каждая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.*

256. Доказать, что цена игры v удовлетворяет соотношениям $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$.

257. Записать платежную функцию для игры, задаваемой матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$. Определить цену игры и проверить справедливость неравенств (4).

258. Рассчитать величину платежа для игр, заданных матрицами задач 255 (1 и 2) при $\overline{X}=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ и $\overline{Y}=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

259. Доказать, что решение игры не изменится, если ко всем элементам a_{ik} платежной матрицы прибавить некоторое постоянное число. Как при этом изменится цена игры?

Исследование игры обычно начинается с исключения в платежной матрице заведомо невыгодных и дублирующих стратегий.

После этого упрощенную матрицу проверяют на наличие в ней седловой точки, что позволяет сразу же определить решение и цену игры.

Если седловой точки нет, то переходят к определению оптимальных смешанных стратегий.

260. Исследовать игры, заданные следующими матрицами:

$$1)\begin{pmatrix}8 & 6 & 4 & 7 & 7\\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6\\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4\\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 5 & -1\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & 5 & 2\end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix}8 & 4 & 3 & 7\\ 7 & 6 & 8 & 9\\ 8 & 2 & 4 & 6\\ 6 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. 1) 1-я строка доминирует над 2-й и 3-й, так как все ее элементы соответственно не меньше элементов 2-й и 3-й строк. Поэтому стратегии A_2 и A_3 заведомо менее выгодны, чем A_1, и могут быть исключены. В результате получаем матрицу $\begin{pmatrix}8 & 6 & 4 & 7 & 7\\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9\end{pmatrix}$. В этой матрице 1, 4 и 5-й столбцы доминируют над 2-м. Поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока B, стремящегося уменьшить выигрыш игрока A, то эти стратегии заведомо невыгодны. После их исключения получаем матрицу $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, в которой нет доминирующих стратегий. Определив нижнюю и верхнюю цены игры, получим $\alpha_1 = \min\{6, 4\} = 4$, $\alpha_2 = \min\{2, 6\} = 2$, откуда $\alpha = \max\{4, 2\} = 4$. Аналогично, $\beta_1 = \max\{6{,}2\} = 6$, $\beta_2 = \max\{4, 6\} = 6$, откуда $\beta = \min\{6, 6\} = 6$.

Так как $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки и ее решением будет смешанная стратегия.

2) Стратегия A_2 доминирует над A_1 и A_3. Следовательно, исключив последние, получим матрицу $\begin{pmatrix}4 & 1 & 5 & -1\\ 3 & -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$. В этой матрице можно исключить B_1 и B_3, доминирующие над B_2. Окончательно получим $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Перейдем к исследованию седловой точки, располагая числа α_i и β_k справа и снизу матрицы:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \boxed{-1}\\ -1 & 2 & \boxed{-1}\\ \hline \boxed{1} & 2 & \end{array}.$$

Получим $\alpha = -1$ и $\beta = 1$, следовательно, седловой точки нет.

3) Стратегия A_4 заведомо невыгодна по сравнению с A_1 и может быть исключена. В оставшейся матрице

$$\begin{pmatrix}8 & 4 & 3 & 7\\ 7 & 6 & 8 & 9\\ 8 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

можно исключить доминирующие стратегии B_1 и B_4. После их исключения получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

в которой вновь оказались заведомо невыгодными стратегии A_1 и A_3. Их исключение дает матрицу (6 8). Теперь для игрока A осталась одна стратегия A_2 (в первоначальной нумерации) и для игрока B, очевидно, выгодной является стратегия B_2, обеспечивающая ему проигрыш 6, вместо 8 при B_3.

Окончательно получили решение игры в виде чистых стратегий A_2 и B_2 и цену игры $v = 6$. Полученное решение в виде чистых стратегий говорит о том, что исходная матрица имела седловую точку $a_{22} = 6$, что можно было бы установить прямым исследованием:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 & 3 \\ 7 & \boxed{6} & 8 & 9 & \boxed{6} \\ 8 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \boxed{6} \\ 2 \\ 2 \end{matrix} . \\ \begin{matrix} 8 & \boxed{6} & 8 & 9 & \boxed{6} \end{matrix} \end{array}$$

Следовательно, $\alpha = \max \alpha_i = 6$, $\beta = \min \beta_k = 6$, и $\alpha = \beta = 6 = v$.

261. Провести возможные упрощения платежной матрицы в следующих задачах:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}3 & 1{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

§ 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ИГР 2×2 И $2 \times n$

В дальнейших приемах решения игр будет использоваться следующая важная теорема:

Если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную (в том числе и чистые стратегии).

262. Исследовать и решить игру, заданную матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Прежде всего проверяем наличие седловой точки. Имеем $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, откуда $\alpha = 1$; $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, откуда $\beta = 2$. Следовательно, $\alpha \neq \beta$ и седловой точки нет. Перейдем к отысканию оптимальной смешанной стратегии. Пусть для игрока A стратегия задается вектором $X = (x_1, x_2)$ и цена игры есть v, Тогда, на основании указанной теоремы, при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игрок A получит средний выигрыш, равный цене игры, т. е.

$$-1\cdot x_1^*+3x_2^*=v \text{ (при стратегии } B_1\text{)},$$
$$2x_1^*+x_2^*=v \text{ (при стратегии } B_2\text{)}.$$

Кроме этих двух уравнений, имеем еще уравнение для частостей:

$$x_1^*+x_2^*=1.$$

Из этой системы трех уравнений с тремя неизвестными найдем

$$x_1^*=\frac{2}{5},\quad x_2^*=\frac{3}{5} \text{ и } v=\frac{7}{5}.$$

Аналогичным образом найдем оптимальную стратегию для игрока B: $y_1^*=\frac{1}{5}$ и $y_2^*=\frac{4}{5}$. Следовательно, решением игры являются смешанные стратегии $\bar{X}^*=\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ и $\bar{Y}^*=\left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{5}\right)$, а цена игры $v=\frac{7}{5}$.

263. Доказать теорему, приведенную в начале параграфа для игры, оптимальная стратегия которой задается векторами $\bar{X}^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ и $\bar{Y}^*=(y_1^*,\ y_2^*)$.

264. Найти решение игры с матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и дать геометрическую интерпретацию этому решению.

Решение. Первая часть задачи выполняется так же, как и в задаче 262. В результате приходим к системе трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1^*+a_{21}x_2^*&=v \\ a_{12}x_1^*+a_{22}x_2^*&=v \\ x_1^*+\quad x_2^*&=1 \end{aligned}\right\},$$

решение которой

$$x_1^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}},\quad x_2^*=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}},$$
$$v=\frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

Аналогично находится и смешанная стратегия для игрока B. Для геометрического анализа задачи воспользуемся следующим построением. В системе координат xOy отложим на оси Ox отрезок A_1A_2 единичной длины, каждой точке $\bar{X}$ которого будет отвечать некоторая смешанная стратегия $\bar{X}=(x_1,\ x_2)=(x_1,\ 1-x_1)$ (рис. 13).

Так, точке A_1, для которой $x_2=0$, $x_1=1$, отвечает стратегия A_1, точке A_2, для которой $x_1=0$, $x_2=1$, — стратегия A_2 и т. д. По оси ординат будем откладывать выигрыши игрока A. При применении стратегии A_1 выигрыш равен a_{11}, если 2-й игрок применяет B_4, и a_{12}, если 2-й игрок применяет B_2. Следовательно, получим две точки B_1 и B_2. Соответственно, при применении стратегии A_2, выигрыши могут быть a_{21} (при B_1) или a_{22} (при B_2): они показаны двумя точками (B_1 и B_2) на перпендикуляре, восставленном в точке A_2. Средний выигрыш v_1 при любом сочетании страте-

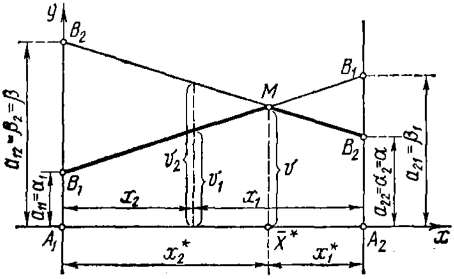

РИС. 13

гий A_1 и A_2 (с частостями x_1 и x_2) и стратегии B_1 2-го игрока равен $v_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{21}$ и геометрически определяется ординатой, восставленной в точке $\bar{X}$ до пересечения с отрезком $B_1 B_1$. Аналогично, средний выигрыш при применении стратегии B_2 будет определяться ординатами точек, лежащих на отрезке $B_2 B_2$.

Ординаты точек, лежащих на ломаной $B_1 M B_2$ (показанной жирной линией), характеризуют минимальный выигрыш игрока A при использовании им любой смешанной стратегии $\bar{X}$ (на участке $B_1 M$ против стратегии B_1 и на участке $M B_2$ — против стратегии B_2).

Следуя принципу максимина, получим, что оптимальное решение игры определяет точка M, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума. Ей отвечает на оси абсцисс оптимальная стратегия $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*)$, а ее ордината равна цене игры v. По цене игры сразу находится оптимальная стратегия для игрока B из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1^* a_{11} + y_2^* a_{21} &= v \\ y_1^* \quad + y_2^* &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

На том же чертеже (рис. 13) можно показать нижнюю и верхнюю цену игры.

Если матрица игры имеет седловую точку, то получим следующие разновидности графического изображения игры.

1) Решением игры для игрока A является чистая стратегия A_2 (для игрока B — стратегия B_2), т. е. $\bar{X}^* = (0,\ 1)$ и $\bar{Y}^* = (0,\ 1)$. Игра имеет седловую точку $a_{22} = v$, равную цене игры (рис. 14).

2) Решение игры соответствует точке B_1 и задается векторами $\bar{X}^* = (0,\ 1)$ и $\bar{Y}^* = (1,\ 0)$. Игра имеет седловую точку $a_{21} = v$. Стратегия B_2 доминирующая и явно невыгодная для игрока B (рис. 15).

265. Решить и привести графическую иллюстрацию игр, заданных следующими матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5)\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix};\quad 6)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание. Для графической иллюстрации удобно предварительно привести все элементы платежной матрицы к положительным числам, добавив ко всем элементам положительное число (см. задачу 259).

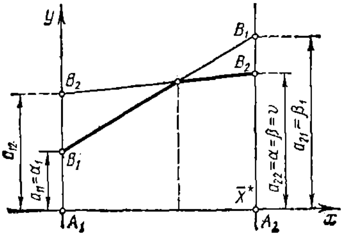

РИС. 14

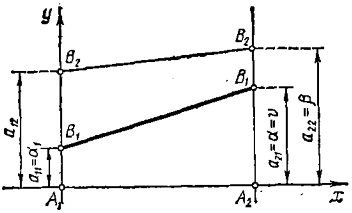

РИС. 15

Графическая интерпретация позволяет решать игры с матрицей $2 \times q$ или $p \times 2$.

266. Найти решение и цену игры с матрицей
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Строим графическое изображение игры, подобно предыдущему (рис. 16). Здесь имеем 4 прямые, характеризующие средний выигрыш при применении четырех чистых стратегий игрока B. Как и ранее, ломаная B_2MNB_4 дает нижнюю границу выигрыша. Наибольшая ордината, равная цене игры v, соответствует точке M, в которой пересекаются прямые B_2B_2 и B_1B_1. Это означает, что оптимальная стратегия игрока B включает чистые стратегии B_2 и B_1. Координаты точки M находим, как координаты точки пере-

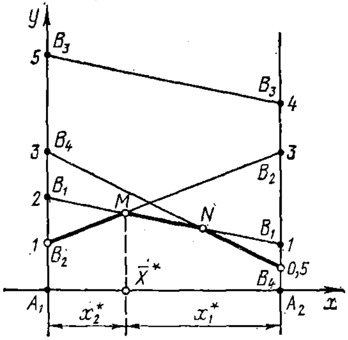

РИС. 16

сечения прямых B_1B_1 и B_2B_2. Соответствующие три уравнения имеют вид

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1^* + x_2^* = v \\ x_1^* + 3x_2^* = v \\ x_1^* + x_2^* = 1 \end{array}\right\}.$$

Решая эти уравнения, находим

$$x_1^* = \frac{2}{3},\quad x_2^* = \frac{1}{3} \text{ и } v = \frac{5}{3}.$$

Аналогично находится оптимальная стратегия для B из уравнений

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1^* + y_2^* = \frac{5}{3} \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{array}\right\},$$

откуда $y_1^* = \frac{2}{3}$ и $y_2^* = \frac{1}{3}$.

Таким образом, решением игры являются смешанные стратегии $\overline{X}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и $\overline{Y}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; при этом цена игры $v = \frac{5}{3}$.

267. Найти решение следующих игр:

$$1) \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix};\quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix};\quad 4) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};\quad 6) \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\quad 7) \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\quad 8) \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указание. Задачи (5) — (9) решаются аналогично предыдущим, но относительно игрока B. Соответственно этому строится ломаная, которая характеризует верхнюю границу выигрыша и на которой находится точка с минимальной ординатой.

§ 3. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИГРЫ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Оптимальные стратегии $\overline{X}^*=(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_p^*)$ и $\overline{Y}^* = (y_1^*, \dots, y_k^*, \dots, y_q^*)$ игры с платежной матрицей $\|a_{ik}\|_{p\times q}$ могут быть определены путем решения симметричной пары двойственных задач линейного программирования:

минимизировать	максимизировать
$T=x_1'+x_2'+\dots+x_i'+\dots+x_p'$	$z=y_1'+\dots+y_k'+\dots+y_q'$
при условиях	при условиях
$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1'+\dots+a_{i1}x_i'+ \\ +\dots+a_{p1}x_p'\geqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1k}x_1'+\dots+a_{ik}x_i'+ \\ +\dots+a_{pk}x_p'\geqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1q}x_1'+\dots+a_{iq}x_i'+ \\ +\dots+a_{pq}x_p'\geqslant 1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1'+\dots+a_{1k}y_k'+ \\ +\dots+a_{1q}y_q'\leqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}y_1'+\dots+a_{ik}y_k'+ \\ +\dots+a_{iq}y_q'\leqslant 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}y_1'+\dots+a_{pk}y_k'+ \\ +\dots+a_{pq}y_q'\leqslant 1 \end{array}\right\}.$
$x_1'\geqslant 0, \dots, x_i'\geqslant 0, \dots, x_p'\geqslant 0$	$y_1'\geqslant 0, \dots, y_k'\geqslant 0, \dots, y_q'\geqslant 0.$

Решив эти задачи, найдем x_i^*, y_k^* и v из соотношений:

$$v=\frac{1}{T_{\min}}=\frac{1}{z_{\max}};\quad x_i^*=vx_i' \text{ и } y_k^*=vy'^*_k,$$

где $i=1, \dots, p$; $k=1, \dots, q$.

268. Найти решение и цену игры, заданной матрицей

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 6 & 5 & 7 \end{array} & \end{array}$$

Решение. Данная матрица имеет седловую точку $a_{32}=5$, поэтому ее решением являются чистые стратегии A_3 и B_2, т. е. $\overline{X}^*=(0, 0, 1)$ и $\overline{Y}^*=(0, 1, 0)$ при $v=5$. Однако мы найдем решение этой игры указанным выше общим методом. Пара двойственных задач будет в данном случае выглядеть следующим образом:

минимизировать	максимизировать
$T=x_1'+x_2'+x_3'$	$z=y_1'+y_2'+y_3'$
при условиях	при условиях
$\left.\begin{array}{l} 6x_1'+4x_2'+5x_3'\geqslant 1 \\ 2x_1'+3x_2'+5x_3'\geqslant 1 \\ 5x_1'+7x_2'+6x_3'\geqslant 1 \end{array}\right\},$	$\left.\begin{array}{l} 6y_1'+2y_2'+5y_3'\leqslant 1 \\ 4y_1'+3y_2'+7y_3'\leqslant 1 \\ 5y_1'+5y_2'+6y_3'\leqslant 1 \end{array}\right\},$
$x_1'\geqslant 0,\ x_2'\geqslant 0,\ x_3'\geqslant 0$	$y_1'\geqslant 0,\ y_2'\geqslant 0,\ y_3'\geqslant 0.$

Из этих двух задач удобнее симплексным методом решать вторую, одновременно получая из индексной строки решение первой.

$\overline{C}_б$	Баз. перем.	a_{i0}	1	1	1	Балансовые переменные			$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
			y_1'	y_2'	y_3'	y_4	y_5	y_6	
	y_4	1	6	2	5	1			1/2
	y_5	1	4	3	7		1		1/3
	y_6	1	5	$\boxed{5}$	6			1	1/5
	z		—1	—1	—1				
	y_4	3/5	4		13/5			—2/5	
	y_5	2/5	1		17/5			—3/5	
1	y_2'	1/5	1	1	6/5			1/5	
		1/5			1/5			1/5	

После I итерации симплексного метода получили оптимальное решение

$$y_1'^* = 0, \quad y_2'^* = \frac{1}{5}, \quad y_3'^* = 0 \text{ и } z_{\max} = T_{\min} = \frac{1}{5}.$$

Отсюда получаем $v = \frac{1}{z_{\max}} = 5$ и $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_2^* = 1$ и $y_3^* = 0$.

Таким образом, оптимальная стратегия для игрока B есть $\overline{Y}^* = (0, 1, 0)$.

Из индексной строки против переменных y_4, y_5 и y_6 получаем оптимальное решение первой задачи $x_1'^* = 0$, $x_2'^* = 0$, $x_3'^* = \frac{1}{5}$, откуда $\overline{X}^* = (0, 0, 1)$.

269. Решить с помощью построения двойственной пары задач игры, платежные матрицы которых приведены в следующих задачах: 1) 255 (1); 2) 255 (2); 3) 255 (3); 4) 255 (5); 5) 255 (6).

270. Решить игру, определяемую платежной матрицей задачи 261 (3), предварительно упростив ее.

Заданной паре симметричных двойственных задач линейного программирования

$$A\overline{X} \leqslant \overline{B}, \; \overline{X} \geqslant 0, \; z = \overline{C}\,\overline{X} \text{ (max) и } \overline{Y}A > \overline{C}, \; \overline{Y} \geqslant 0, \; T = \overline{B}\,\overline{Y} \text{ (min)}$$

эквивалентна игра, платежная матрица которой

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & A & -\bar{B} \\ -A' & 0 & \bar{C}' \\ \bar{B}' & -\bar{C} & 0 \end{pmatrix},$$

где штрихом обозначена операция транспонирования.

271. Построить игру, эквивалентную двойственной паре задач, одна из которых имеет следующий вид: максимизировать

$$z=x_1+2x_2+x_3$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3\leqslant 1 \\ 2x_1-3x_2+x_3\leqslant 2 \end{array}\right\}; \quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0.$$

Решение. В данной задаче

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\quad \bar{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ и } \bar{C}=(1,\ 2,\ 1).$$

Следовательно,

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \bar{B}'=(1,\ 2) \text{ и } \bar{C}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

272. Построить платежные матрицы игр, эквивалентных следующим задачам линейного программирования (приведена одна из пары двойственных задач):

1) $\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2\leqslant 6 \\ x_1-2x_2\leqslant 1 \end{array}\right\}$, $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$ $z=2x_1-x_2\,(\max)$;

2) $\left.\begin{array}{l} x_1-x_2\leqslant 1 \\ 2x_1+x_2\leqslant 4 \end{array}\right\}$, $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,$ $z=-x_1+x_2\,(\max)$;

3) $\left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_1-x_2=3 \end{array}\right\}$, $x_1\geqslant 0;\ x_2\geqslant 0;$ $z=x_1+2x_2\,(\max)$.

273. Предприятие может выпускать три вида продукции (А, Б и В), получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос в свою очередь может принимать одно из четырех состояний (I, II, III и IV). В следующей матрице элементы a_{ik} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции и k-м состоянии спроса:

$$\begin{array}{c|cccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ \hline \text{А} & 8 & 3 & 6 & 2 \\ \text{Б} & 4 & 5 & 6 & 5 \\ \text{В} & 1 & 7 & 4 & 7 \end{array}$$

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Указание. Оптимальные пропорции можно определить, как оптимальную смешанную стратегию для «игрока», играющего против «природы» (спроса).

Подобный принцип выбора оптимальной стратегии получил название «максиминного критерия».

274. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую оно может сразу отправить потребителю (стратегия *А*), отправить на склад для хранения (стратегия *Б*), или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия *В*) для длительного хранения.

В свою очередь потребитель может немедленно приобрести эту продукцию (стратегия I), приобрести ее в течение небольшого отрезка времени (II) или затребовать ее после длительного периода времени (III).

Если предприятие выберет стратегию *А*, то дополнительные затраты на хранение и обработку продукции не потребуются.

Однако, если при этом потребитель применит стратегию II или тем более III, то предприятие потерпит убытки из-за порчи части продукции. Наоборот, если предприятие выберет стратегию *В*, а потребитель — стратегию I, то возникнут неоправданные расходы на консервацию продукции. Определить оптимальное соотношение между продукцией, отправляемой потребителю на склад и на дополнительную обработку, руководствуясь «минимаксным критерием» (гарантированный средний уровень убытка), при следующей матрице затрат:

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{А} & 2 & 5 & 8 \\ \text{Б} & 7 & 6 & 10 \\ \text{В} & 12 & 10 & 8 \end{array}.$$

275. Для отопления помещения необходимо приобрести топливо. Однако расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время (мягкая, нормальная и суровая зима; см. таблицу):

Погода	Мягкая	Нормальная	Суровая
Расход, т	5	10	18
Цена, руб./т	10	16	20

В настоящее время уголь может быть приобретен по минимальной цене (10 руб/т) и излишек неиспользованного угля можно реализовать весной по цене 5 руб/т. Можно избрать одну из трех стратегий в закупке угля: A_1 — 5 т, A_2 — 10 т и A_3 — 18 т.

Предполагая, что подобных помещений имеется 100, определить оптимальную стратегию в образовании запасов, руководствуясь «минимаксным критерием».

276. Магазин может завести в различных пропорциях вары трех типов (А, Б и В). Их реализация, а следовательно, и получаемая магазином прибыль (a_{ik}) зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагая, что последний может характеризоваться тремя состояниями (I, II, III) и учитывая, что спрос связан с изменением моды и прогнозирование его невозможно, определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибылей:

$$\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix} \end{array}.$$

277. Для игры 2 × 2, не имеющей седловой точки, может быть предложен следующий упрощенный прием определения оптимальной смешанной стратегии.

Вычтем из элементов 1-го столбца элементы 2-го столбца. Получим столбец $\begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} \\ a_{12}-a_{22} \end{pmatrix}$, элементы которого по абсолютной величине пропорциональны частотам x_1 и x_2 оптимальной стратегии первого игрока. Аналогично определяется смешанная стратегия для второго игрока. Доказать справедливость этого правила.

278. Аналогично предыдущей задаче можно указать простое правило для решения игры $2 \times m$, также не имеющей седловой точки. Сущность его состоит в том, что выбираются произвольные две стратегии для второго игрока (имеющего m стратегий) и решается игра 2×2. Полученное решение для первого игрока оценивается против любой из оставшихся стратегий второго игрока. Если полученный «выигрыш» не меньше найденной цены игры 2×2, то это и будет решением первоначальной игры. Если же будет получен меньший «выигрыш», то испытывается таким образом другая игра 2×2.

279. Пользуясь указанным в задаче 278 правилом, решить игры:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 & 13 & 10 & 13 \\ 13 & 4 & 12 & 9 & 4 & 1 & 13 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

280. Рассмотрим игру 3×3 с тремя активными стратегиями для каждого из игроков (т. е. все $x_i > 0$ и $y_k > 0$). Если при этом игра не имеет седловой точки и доминирующих стратегий (последнее вытекает из условий $x_i > 0$ и $y_k > 0$), то может быть указано упрощенное правило решения игры, аналогичное указанному в задаче 277. Вычитаем почленно 3-ю строку из 1-й и 2-й. В образовавшейся матрице частоты стратегий для второго игрока пропорциональны абсолютным величинам миноров 3-й строки. Аналогично находится оптимальная стратегия для первого игрока. Доказать это правило и решить с его помощью следующие игры 3×3:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 29 & 30 & 32 \\ 180 & 60 & -20 \\ 20 & 70 & 120 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

281. Доказать следующие два взаимно обратные утверждения: 1) если игра имеет седловую точку, то найдется элемент $a_{i_0k_0}$ платежной матрицы, который будет наибольшим в столбце и наименьшим в строке, т. е. выполняются неравенства $a_{ik_0} \leqslant a_{i_0k_0} \leqslant a_{i_0k}$ при всех $i = 1, \ldots, p$ и $k = 1, \ldots, q$;

2) если найдется элемент $a_{i_0k_0}$, удовлетворяющий указанным выше неравенствам, то игра имеет седловую точку.

ГЛАВА X

Целочисленное программирование

Рассматриваются задачи линейного программирования (З. Л. П.) при дополнительном условии, налагаемом на все переменные *(полностью целочисленные задачи)* или на часть переменных *(частично целочисленные задачи)*.

Решение таких задач сводится к решению конечной последовательности специально построенных З. Л. П.: P_0, P_1, ..., P_l, ..., P_N, каждая из которых получается из предыдущей путем добавления к ее условиям дополнительного линейного ограничения (неравенства), называемого «сечением».

При этом l-м сечением называется линейное ограничение, вводимое в задачу P_{l-1} для образования задачи P_l и удовлетворяющее двум условиям:

1) *любое целочисленное решение задачи P_{l-1} ему удовлетворяет;*

2) *любое нецелочисленное решение задачи P_{l-1} ему не удовлетворяет («отсекается»).*

Методы целочисленного программирования различаются в зависимости от способа формирования сечения.

Пусть задача P_{l-1} решена симплексным методом и ее решение $\overline{X}_l$ не удовлетворяет условиям целочисленности. Введем обозначения

$\{a\}$ — дробная часть числа a,

k — индекс свободных переменных в последней симплексной таблице,

s — номер строки в этой таблице с наибольшим значением $\{a_{s0}\}$.

Тогда **I сечение Гомори** для решения полностью целочисленно задачи запишется в виде

$$\{a_{s0}\}-\sum_k \{a_{sk}\}\,x_k \leqslant 0. \qquad (1)$$

II сечение Гомори, применяемое для решения частично целочисленной задачи (его можно использовать и для полностью целочисленных задач), запишется в виде

$$\{a_{s0}\}-\Sigma\,\alpha_{sk}x_k \leqslant 0, \qquad (2)$$

где α_{sk}— коэффициенты, определяемые из следующих соотношений:

1) для x_k, не подчиненных требованиям целочисленности,

$$\alpha_{sk}=\begin{cases} a_{sk}, & \text{если } a_{sk}\geqslant 0,\\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1-\{a_{s0}\}}\,|\,a_{sk}\,|, & \text{если } a_{sk}<0; \end{cases} \qquad (3)$$

2) для x_k, подчиненных требованиям целочисленности,

$$\alpha_{sk}=\begin{cases} \{a_{sk}\}, & \text{если } \{a_{sk}\}\leqslant\{a_{s0}\},\\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1-\{a_{s0}\}}\,(1-\{a_{sk}\}), & \text{если } \{a_{sk}\}>\{a_{s0}\}. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение полностью или частично целочисленных задач выполняется в виде последовательных итераций, каждая из которых включает следующие пункты:

1) решается задача P_{l-1} и находится ее оптимальное решение $\bar{X}_{l-1}$;

2) если решение $\bar{X}_{l-1}$ удовлетворяет условиям целочисленности, то процесс заканчивается, если же эти условия не удовлетворяются, то переходят к п. 3;

3) на основании последней симплексной таблицы, полученной при решении задачи P_{l-1}, записывается сечение Гомори (I или II);

4) добавление ограничения, найденного в предыдущем пункте, к условиям задачи P_{l-1} дает задачу P_l, после чего вновь возвращаются к п. 1.

Примечание: п. 4 практически осуществляется путем дописывания строки, соответствующей сечению Гомори к последней симплексной таблице, полученной при выполнении п. 1.

§ 1. ПОЛНОСТЬЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

282. Решить полностью целочисленную задачу: максимизировать $z = x_1 + 4x_2$ при условиях

$$\left.\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3&=2 \\ 3x_1+2x_2+x_4&=6 \end{aligned}\right\}, \quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0, \text{ все } x_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \text{ — целочисленные.}$$

Решение. Отбрасывая условие целочисленности, решаем симплексным методом задачу P_0.

$\bar{c}_б$	Баз. перем.	a_{i0}	1	4			$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	
	x_3	2	—1	$\boxed{2}$	1		1
	x_4	6	3	2		1	3
	z		—1	—4			
4	x_2	1	—1/2	1	1/2		
	x_4	4	$\boxed{4}$		—1	1	
	z	4	—3		2		
4	x_2	3/2		1	3/8	1/8	
1	x_1	1	1		—1/4	1/4	
	z	7			5/4	3/4	

После II итерации получаем в последней симплексной таблице оптимальное решение $X_0 = (1,\ 3/2,\ 0.\ 0)$. Это решение не целочисленное. Поэтому переходим к построению задачи P_1 (п. 3 и 4). Единственная строка с нецелочисленным значением a_{i0} — 1-я ($s = 1$). Записываем I сечение Гомори

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{\frac{3}{8}\right\} x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\} x_4\right) \leqslant 0,$$

или, после упрощения, $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8} x_3 + \frac{1}{8} x_4\right) \leqslant 0$. Перенося члены с переменными в правую часть и введя неотрицательную балансовую переменную u_1, получим сечение в форме 3-го дополнительного уравнения

$$\frac{3}{8} x_3 + \frac{1}{8} x_4 - u_1 = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Присоединяя его к предыдущим двум, получим задачу P_1. Решение этой задачи можно начинать с окончательной симплексной таблицы для P_0, добавив полученное 3-е уравнение.

Решение задачи P_1

$\bar{C}_б$	Баз перем.		1	4				$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1		
4	x_2	3/2		1	3/8	1/8		4	12
1	x_1	1	1		—1/4	1/4			
	u_1	1/2			$\boxed{3/8}$	1/8	—1	4/3	4
	z	7			5/4	3/4			
4	x_2	1		1			1		
1	x_1	4/3	1			1/3	—2/3		
	x_3	4/3			1	1/3	—8/3		
	z	16/3				1/3	10/3		

В уравнении (*) переменная u_1 может служить базисной, однако коэффициент при ней равен —1, поэтому в исходной для задачи P_1 таблице базисное решение не является опорным ($u_1 = -1/2$). Целью дальнейших преобразований является получение исходного опорного решения (см. гл. I, § 4).

Выделяем 3-ю дополнительную строку и для столбцов, имеющих в этой строке положительные элементы (в данном случае 3-го и 4-го) вычисляем отношения a_{i0} к a_{ip}. Если найдется столбец, для которого $\min\{a_{i0}/a_{ip}\}$ соответствует выделенной строке, то такой столбец и выделенную строку выбираем в качестве разрешающих, после чего переменная u_1 сразу же выводится из базиса и новое решение окажется опорным. Если такого столбца нет, то в качестве разрешающего выбирается столбец с наибольшим элементом в выделенной строке и разрешающая строка, как обычно, по $\min\{a_{i0}/a_{ip}\}$. После выполнения преобразований процесс расчетов начинается сначала.

В данном случае для обоих столбцов $\min\{a_{i0}/a_{ip}\}$ соответствует выделенной строке, поэтому выбрав за разрешающие 3-й столбец и 3-ю строку, получим сразу же исходное опорное решение.

Так как это решение, оказавшееся одновременно и оптимальным, вновь не целочисленное, то переходим к построению задачи P_2.

Соответствующее сечение будет $\left\{\frac{4}{3}\right\} - \left(\left\{\frac{1}{3}\right\} x_3 + \left\{\frac{-2}{3}\right\} u_1\right) \leqslant$ $\leqslant 0$. Так как $\left\{\frac{4}{3}\right\} = \frac{1}{3}$, $\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$ и $\left\{\frac{-2}{3}\right\} = \frac{-2}{3} - \left[\frac{-2}{3}\right] =$ $= \frac{-2}{3} - (-1) = \frac{1}{3}$, то получаем новое, 4-е уравнение, которое добавляем в качестве 4-й строки исходной таблицы для задачи P_2: $\frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3} u_1 - u_2 = \frac{1}{3}$.

После выполнения одной итерации получаем исходное опорное решение $\bar{X}_2 = (1, 1, 1, 1)$, которое оказалось одновременно и оптимальным, и целочисленным. Таким образом, получили $\bar{X}_{опт} = (1, 1, 1, 1)$ и $z_{\max} = 5$.

Решение задачи P_2

$\bar{C}_б$	Баз. перем.	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
	x_2	1		1			1		4	
	x_1	4/3	1			1/3	—2/3		4	
	x_3	4/3			1	1/3	—8/3		1	1
	u_2	1/3				1/3	1/3	—1		
	z	16/3				1/3	10/3			
	x_2	1		1			1			
	x_1	1	1				—1	1		
	x_3	1			1		—3	1		
	x_4	1				1	1	—3		
	z	5					3	1		

Замечания. 1. Может оказаться, что переход от базисного к опорному решению приведет к появлению отрицательных оценок в индексной строке. Тогда потребуются дополнительные итерации последовательного улучшения решения.

2. При выборе строки для построения сечения могло оказаться несколько равных максимальных значений $\{a_{i0}\}$ (например, в задаче P_1 мы имели $a_{20} = a_{30} = \frac{4}{3}$). Тогда для образования сечения выбирается первая из этих строк.

3. Значения $z_{\max}$ при переходе от задачи P_0 к P_1 от P_1 к P_2 и т. д., как правило, уменьшаются, так как «отсекаются» ранее найденные оптимальные решения.

283. Дать графическую интерпретацию решения задачи 282.

Решение. На рис. 17 построена область допустимых решений задачи P_0 и показано определение ее оптимального решения. При решении задачи P_1 введено I сечение $\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \geqslant \frac{1}{2}$. Исключая из него переменные x_3 и x_4 с помощью исходных уравнений, получаем $x_2 \leqslant 1$. Этому неравенству соответствует граничная прямая $x_2 = 1$, отсекающая от области найденное нецелочисленное оптимальное решение $\bar{X}_0$, но сохраняющее все целочисленные решения [их в данном случае только четыре: (0, 1), (1, 1), (1, 0) и (2, 0)]. Для новой области задачи P_1 находим новое оптимальное решение $\bar{X}_1 = (4/3,\ 1,\ 0,\ 4/3)$. При переходе к задаче P_2 вводится II сечение $\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}u_1 \geqslant \frac{1}{3}$, которое после исключения базисных переменных x_4 и u_1 принимает вид $x_1 + x_2 \leqslant 2$. В новой области оптимальное решение оказывается искомым целочисленным.

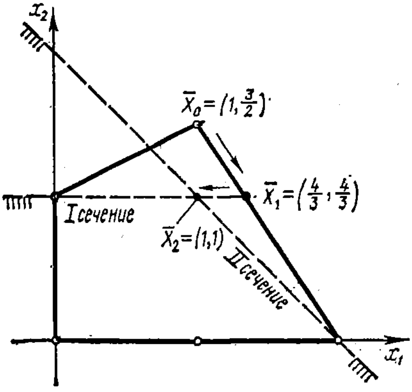

РИС. 17

284. Найти полностью целочисленное решение следующих задач, сопровождая (где это возможно) решение графической иллюстрацией (предполагается, что все $x_k \geqslant 0$):

1) $z = 3x_1 + 3x_2\,(\max)$, $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geqslant 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 36 \\ x_2 &\leqslant 13 \end{aligned}\right\}$;

2) $z = 3x_1 + 4x_2\,(\max)$, $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ x_1 + 4x_2 &\leqslant 10 \end{aligned}\right\}$;

3) $z = x_1 + x_2\,(\max)$, $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 5 \\ x_2 &\leqslant 2 \end{aligned}\right\}$;

4) $z = x_1\,(\max)$, $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 &= 24 \end{aligned}\right\}$;

5) $z = x_1\ (\max)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6 \end{array}\right\};$$

6) $z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4\ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \end{array}\right\};$$

7) $z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4\ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8 \end{array}\right\};$$

8) $z = x_1 + 2x_2 + x_5\ (\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{array}\right\};$$

9) $z = 2x_1 + 2x_2 + 10\ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \end{array}\right\};$$

10) $z = x_1 + x_2\ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \end{array}\right\};$$

11) $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6\ (\min)$,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 = 6 \end{array}\right\};$$

12) $z = 3x_1 + 4x_2\ (\max)$,

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{array}\right\}.$$

285. Доказать, что дополнительное ограничение вида $\sum x_k \geqslant 1$, где суммирование распространяется на все свободные переменные в оптимальном нецелочисленном решении задачи P_{k-1}, является «сечением» для построения задачи P_k.

§ 2. ЧАСТИЧНО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

286. Решить следующую частично целочисленную задачу: максимизировать $z = x_1 + 8x_2$ при условиях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ 0,16x_1 + x_2 \leqslant 1,9 \end{array}\right\},$$ x_1 и x_2 — неотрицательные и целочисленные.

Решение. Задача является не полностью, а частично целочисленной, так как после приведения к канонической форме получим вместо второго неравенства уравнение $0,16x_1 + x_2 + x_4 = 1,9$, в котором переменная x_4 даже при целочисленных значениях x_1 и x_2 может принимать не целочисленные значения.

Решение задачи P_0

$\bar{C}_б$	Баз. перем.		1	8			$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	
	x_3	9	3	1	1		9
	x_4	1,9	0,16	$\boxed{1}$		1	1,9
	z		−1	−8			
	x_3	7,1	2,84		1	−1	
	x_2	1,9	0,16	1		1	
	z	15,2	0,28			8	

После I итерации получили оптимальное решение $\bar{X}_0 = (0;\ 1,9;\ 7,1;\ 0)$, в котором условие целочисленности нарушено для x_2. Для перехода к задаче P_1 строим сечение (2) по 2-й строке ($s = 2$). Из таблицы получаем:

$$\{a_{20}\} - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{24}x_4) \geqslant 0. \qquad (*)$$

Так как x_1 — целочисленная переменная и $\{a_{21}\} < \{a_{20}\}$, то из первого соотношения (4) находим $\alpha_{21} = \{a_{21}\} = 0,16$. Коэффициент α_{24} находим из первого соотношения (3), поскольку на x_4 не наложено требование целочисленности и $a_{24} > 0$. Получим $\alpha_{24} = 1$, откуда сечение (*) запишется в виде $0,16x_1 + x_4 - u_1 = 0,9$.

Включив в окончательную таблицу задачи P_0 дополнительную строку, соответствующую этому уравнению, получим исходную таблицу для задачи P_1.

После II итерации приходим к оптимальному, но не целочисленному решению $\bar{X}_1 = \left(\frac{8}{3},\ 1,\ 0,\ \frac{71}{150}\right)$. Строим новое сечение по 1-й строке

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} - (\alpha_{13}x_3 + \alpha_{15}u_1) \geqslant 0.$$

Решение задачи P_1

$\bar{C}_б$	Баз. перем.		1					$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	
	x_3	7,1	2,84		1	—1		
8	x_2	1,9	0,16	1		1		1,9
	u_1	0,9	0,16			$\boxed{1}$	—1	0,16
	z	15,2	0,28			8		
8	x_3	8	$\boxed{3}$		1		—1	8/3
	x_2	1		1			1	
	x_4	0,9	0,16			1	—1	90/16
	z	8	—1				8	
1	x_1	8/3	1		1/3		—1/3	
8	x_2	1		1			1	
	x_4	71/150			—4/75	1	71/75	
	z	32/3			1/3		23/3	

Решение задачи P_2

$\bar{C}_б$	Баз. перем.	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
1	x_1	8/3	1		1/3				8
8	x_2	1		1					
	x_4	71/150			—4/75	1	71/75		
	u_2	2			$\boxed{1}$		2	—1	2
	z	32/3			1/3		23/3		
1	x_1	2	1				—1	1/3	
8	x_2	1		1			1		
	x_4	0,58				1	0,84	—4/75	
	x_3	2			1		2		
	z	10					7	1/3	

При этом $\alpha_{13}=a_{13}=\frac{1}{3}$ и $\alpha_{15}=\frac{\left\{\frac{8}{3}\right\}}{1-\left\{\frac{8}{3}\right\}}\,|a_{15}|=\frac{2}{3}$, откуда получим уравнение для построения задачи P_2:

$$x_3+2u_1-u_2=2.$$

После I итерации получаем оптимальное решение $\overline{X}_2=(2,1,2,0,58)$, которое и является окончательным решением задачи.

Замечание. Хотя вначале и было указано, что возможные нецелочисленные значения переменной x_4 приводят к задаче частично целочисленной, но путем несложных преобразований исходной системы неравенств можно свести задачу к полностью целочисленной. Действительно, умножив второе неравенство на 100 и введя после этого балансовую переменную, получим уравнение $16x_1+100x_2+x_4=190$, из которого видно, что переменная x_4 при целых значениях x_1 и x_2 может принимать только целые значения.

287. Решить задачи 284 (1—3), используя второй вид сечения. Дать геометрическую интерпретацию решения.

288. Решить следующие частично целочисленные задачи (предполагается, что все $x_k\geqslant 0$):

$$1)\ \left.\begin{aligned}-2{,}9x_1+6x_2&\leqslant 17{,}4\\ 3x_1-x_2&\leqslant 1\end{aligned}\right\},\qquad 2)\ \left.\begin{aligned}x_1+3x_2&\leqslant 12\\ 3x_1-8x_2&\leqslant 24\end{aligned}\right\},$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целочисл.},\qquad x_1 \text{ — целочисл.},$$

$$z=6x_1+x_2\ (\max);\qquad z=x_1\ (\max);$$

$$3)\ \left.\begin{aligned}0{,}5x_1+x_2&\leqslant 1{,}75\\ x_1+0{,}3x_2&\leqslant 1{,}5\end{aligned}\right\},\qquad 4)\ \left.\begin{aligned}2x_1+x_2&\leqslant 4\\ x_1+2x_2&\leqslant 4\end{aligned}\right\},$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целочисл.},\qquad x_2 \text{ — целочисл.},$$

$$z=0{,}25x_1+x_2\ (\max);\qquad z=x_1+x_2\ (\max);$$

$$5)\ \left.\begin{aligned}x_1+x_2+7x_3+2x_4&=3{,}5\\ -2x_1-x_2+3x_3+3x_4&=1{,}5\\ 2x_1+2x_2+8x_3+x_4&=4\end{aligned}\right\},$$

$$x_2 \text{ — целочисл.},$$

$$z=-5x_1+10x_2-7x_3+3x_4\ (\max);$$

$$6)\ \left.\begin{aligned}3x_1+5x_2+x_3&=11\\ 4x_1+x_2+x_4&=8\end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \text{ — целочисл.},$$

$$z=8x_1+6x_2\ (\max).$$

289. Преобразовать задачи 288 (1) и (3) в полностью целочисленные и сравнить их решения с предыдущим.

§ 3. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В зависимости от причин, диктующих условия целочисленности, налагаемые на переменные, различают следующие две разновидности моделей задач целочисленного программирования: *задачи с неделимостью* и *задачи с альтернативными переменными*. К первым относятся модели задач, в которых переменные выражают неделимые величины, как например, число распределяемых машин, число предприятий, количество единиц неделимого груза, число изготовляемых изделий и т. д. Модели этих задач по существу дела не отличаются от обычных моделей задач линейного программирования, рассмотренных в главах VII и VIII. Условие целочисленности устанавливается на основании тщательного анализа содержания задачи. Особую разновидность задач с неделимостью составляют целочисленные транспортные задачи, в которых целочисленность решения автоматически обеспечивается при целочисленности исходных данных (см. гл. VI, § 1).

Модели с альтернативными переменными охватывают весьма разнообразные оптимальные задачи комбинаторного характера, задачи нелинейного программирования, задачи с дополнительными логическими условиями (например, типа «или-или», «если-то» и т. д.), которые с помощью искусственно вводимых альтернативных переменных (т. е. переменных, принимающих два значения «0» или «1») приводятся к линейным моделям задач целочисленного программирования.

I. Задачи с неделимостью

290. Составить модель задачи по определению оптимального плана производства n типов машин при заданных объемах $a_1, \ldots, a_i \ldots, a_m$ ресурсов, норм расхода a_{ik} $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ i-го ресурса на производство одной k-й машины и величинах c_k $(k = 1, \ldots, n)$ прибыли при реализации одной машины k-го типа. Предполагается, что к концу планируемого периода не должно быть незавершенного производства.

291. Имеется m типов машин $(i = 1, \ldots, m)$ и n видов работ $(k = 1, \ldots, n)$, подлежащих выполнению в объемах $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_n$. Задана матрица $\| \lambda_{ik} \|$, где λ_{ik} — производительность i-й машины на k-й работе, матрица $\| c_{ik} \|$, где c_{ik} — себестоимость выполнения единицы k-й работы машиной i-го типа, и стоимость c_i одной машины i-го типа.

Составить математическую модель задачи по определению оптимального машинного парка (т. е. количество машин каждого типа) и оптимального его распределения по указанным работам из условия минимизации суммарной стоимости (машинного парка и производимых работ).

Указание. Ввести два вида переменных: y_i — общее число машин i-го типа и x_{ik} — количество машин i-го типа, используемых на k-й работе; последние могут и не быть целочисленными, если производительность машины λ_{ik} не кратна объему работы b_k.

292. Имеются суда m типов в количествах $q_1, \dots, q_i, \dots, q_m$, на каждом из которых имеются n грузовых емкостей ($k = 1, 2, \dots, n$) с грузоподъемностью d_{ik} (некоторые d_{ik} могут быть равны нулю). Подлежат перевозке p видов грузов в количествах $b_1, .., b_j, \dots, b_p$.

Составить математическую модель задачи по выбору оптимального состава судов, если затраты по эксплуатации одного судна i-го типа равны c_i.

293. Имеется n маршрутов, по каждому из которых необходимо совершить b_k рейсов ($k = 1, \dots, n$) и m типов автомашин, каждая из которых может быть использована в течение a_i ч ($i = 1, \dots, m$). На выполнение i-й машиной рейса по k-му маршруту требуется t_{ik} ч при затратах c_{ik} руб. Составить модель задачи оптимального распределения машин по маршрутам.

294. Требуется распилить a бревен, длиной каждое в 10 м, на брусья трех размеров: 3,5; 4,5 и 5 м, которые должны быть изготовлены в ассортименте 2 : 1 : 1. Составить модель для определения оптимального плана распила из условия максимального использования каждого бревна.

II. Задачи с альтернативными переменными

В отличие от предыдущих моделей, где вводимые переменные выражали непосредственно искомые величины, здесь вводятся искусственно альтернативные переменные, призванные отражать некоторые логические условия задачи.

295. (Задача об оптимальном назначении.) Имеется n работ ($k = 1, 2, \dots, n$) и m механизмов ($i = 1, \dots, m$), способных выполнять эти работы. Задана матрица $\|c_{ik}\|$, элементы которой c_{ik} характеризуют эффективность выполнения i-м механизмом k-й работы. При этом в качестве дополнительного условия принимается, что каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может

выполняться только одним механизмом. Составить модель задачи оптимального распределения механизмов.

296. (Задача «комивояжера».) Имеются $n+1$ пунктов ($i=0, 1, \ldots, n$) с заданными расстояниями d_{ik} между i-м и k-м пунктами. Составить оптимальный маршрут из условия минимизации суммарного пробега для машины, выходящей из «нулевого» пункта, которая должна побывать в каждом пункте по одному и только одному разу и вернуться в «нулевой» пункт.

Решение. Введем n^2 альтернативных переменных x_{ik}, принимающих значение 0, если переезд из i-го пункта в k-й не входит в маршрут, и 1 в противоположном случае. Условия прибытия машины в каждый пункт и выезда из каждого пункта только по одному разу могут быть выражены равенствами

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ik}=1 \; (k=1, \ldots, n) \text{ и } \sum_{k=0}^{n} x_{ik}=1 \; (i=1, \ldots, n). \qquad (5)$$

Однако необходимо обеспечить «непрерывность» маршрута, т. е. чтобы набор «звеньев» (i, k), для которых $x_{ik}=1$ (т. е. звеньев, входящих в маршрут) образовал единую цепочку [например, при $n=7$ цепочка (0, 1) — (1, 5) — (5, 3) — (3, 7) — (7, 4) — (4, 2) — (2, 6) — (6, 0)], а не состоял бы из отдельных не связанных цепочек [например, (0, 1) — (1, 5) — (5, 0) и (2, 7) — (7, 6) — (6, 4) — (4, 3) — (3, 2)]. Это условие можно обеспечить введением дополнительных n переменных $u_i \geqslant 0$ ($i=0, \ldots, n$) и дополнительных n^2 ограничений

$$nx_{ik}+u_i-u_k \leqslant n-1. \qquad (6)$$

Действительно, пусть маршрут включает несколько цепочек. Тогда существует цепочка, начинающаяся и заканчивающаяся в «нулевом» пункте, но охватывающая n_1 звеньев, где $n_1 < n$. Просуммировав эти неравенства вдоль такой цепочки (т. е. при $x_{ik}=1$), получим бессмысленное неравенство $n_1 n \leqslant n_1(n-1)$ (все u_i и u_k при суммировании взаимно уничтожаются).

Суммарная длина пробега машины z, которую необходимо минимизировать, запишется в виде

$$z=\sum\sum d_{ik}x_{ik}. \qquad (7)$$

В результате приходим к следующей модели частично целочисленной задачи: минимизировать (7) при условиях (5), (6), условиях неотрицательности

$$x_{ik} \geqslant 0 \; (i=0, \ldots, n;\; k=0, \ldots, n) \text{ и } u_i \geqslant 0 \; (i=0, \ldots, n)$$

и целочисленности всех переменных x_{ik}.

297. Составить математическую модель и решить задачу комивояжера при следующих числовых данных: $n=3$, $d_{01}=25$, $d_{02}=40$, $d_{03}=30$, $d_{12}=50$, $d_{13}=20$, $d_{23}=60$. Сопоставить полученное решение с результатами непосредственного перебора возможных вариантов маршрутов.

298. (Задача теории расписания, или календарного планирования.) Для обработки n ($k = 1, \ldots, n$) деталей имеется m ($i = 1, \ldots, m$) станков. Каждая деталь должна пройти обработку в некоторой последовательности на всех станках. Задано время t_{ik} обработки k-й детали на i-м станке (некоторые $t_{ik} = 0$, если k-я деталь не обрабатывается на i-м станке). При этом необходимо выполнить следующие условия:

1) на одном станке единовременно может обрабатываться только одна деталь;

2) для каждой детали указан определенный порядок обработки;

3) производственные операции неделимые, т. е. начавшаяся на определенном станке обработка детали должна быть закончена не прерываясь.

Составить модель задачи по определению оптимального порядка обработки деталей, минимизирующего общее время выполнения всех работ.

Решение. Пусть время измеряется в некоторых условных единицах, при которых все t_{ik} являются целыми числами. Введем неотрицательные переменные x_{ik}, указывающие в этих условных единицах «дату» начала обработки k-й детали на i-м станке.

Условие 1) означает, что для любых двух деталей, k-й и j-й, каждая может поступить на обработку в i-м станке только после того, как обработка детали, поступившей первой, будет закончена. Это условие можно выразить соотношениями

$$x_{ik} \geqslant x_{ij} + t_{ij}, \text{ или } x_{ij} \geqslant x_{ik} + t_{ik}. \tag{8}$$

Условие 2), согласно которому некоторая k-я деталь должна сначала обрабатываться на i-м станке, а затем на s-м, можно выразить соотношением

$$x_{sk} \geqslant x_{ik} + t_{ik}. \tag{9}$$

Целевая функция $z = t$, которую необходимо минимизировать, будет выражать собой общее время завершения всех работ.

Величина t связана с переменными задачи соотношениями

$$t \geqslant x_{ik} + t_{ik}. \tag{10}$$

Модель, заданная соотношениями (8) — (10), отличается от задачи линейного программирования альтернативным характером условий (8) («или» — «или»).

Условия (8) можно свести к обычным ограничениям с помощью введения альтернативных переменных y_{ijk}, принимающих значения 0 или 1. Введем некоторую постоянную T, заведомо бо́льшую общей даты выполнения всех работ.

Тогда альтернативные условия (8) равносильны следующей системе неравенств

$$(T+t_{ik})\,y_{ijk}+x_{ij}\geqslant x_{ik}+t_{ik}, \qquad (11')$$

$$(T+t_{ik})\,(1-y_{ijk})+x_{ik}\geqslant x_{ij}+t_{ij}. \qquad (11'')$$

Действительно, если бы $x_{ik}=x_{ij}$ (что противоречило бы условию 1), то из (11′) получили бы $(T+t_{ik})\,y_{ijk}\geqslant t_{ik}$, что возможно лишь при $y_{ijk}=1$, но тогда из (11″) получили бы противоречивое неравенство $0\geqslant t_{ij}$.

При $y_{ijk}=0$ получаем из (11′) $x_{ij}\geqslant x_{ik}+t_{ik}$, т. е. второе из неравенств (8), а из (11″) неравенство $T\geqslant x_{ij}-x_{ik}$, которое выполняется всегда исходя из определения T. Аналогично при $y_{ijk}=1$ получаем из (11″) $x_{ik}\geqslant x_{ij}+t_{ij}$ [первое из неравенств (8)], а из (11′) — тривиальное неравенство $T\geqslant x_{ik}-x_{ij}$.

Таким образом, если j-я деталь поступает на обработку на i-й станок после k-й, то $y_{ijk}=0$, а если до k-й, то $y_{ijk}=1$. Следовательно для каждого i и любых двух деталей (j и k) необходимо, чтобы из двух переменных y_{ijk} и y_{ikj} одна равнялась нулю и другая — единице. Этого можно добиться, введя дополнительные ограничения

$$y_{ijk}+y_{ikj}=1, \qquad (12)$$

которые вместе с условиями неотрицательности и целочисленности обеспечат выполнение указанного требования.

Теперь можем сформулировать окончательно следующую модель целочисленного программирования: минимизировать $z=t$ при условиях (9), (11′), (11″), (12), условиях неотрицательности и целочисленности переменных x_{ik}, y_{ijk} и t.

Хотя полученная модель и может принципиально служить для решения задачи методами целочисленного программирования, но практически расчеты оказываются чрезвычайно громоздкими. Поэтому для решения задач календарного планирования используются иные, так называемые комбинаторные методы.

299. Составить модель задачи по определению оптимального порядка обработки шести деталей ($k=1, \ldots, 6$) на двух станках ($i=1, 2$) при условии, что каждая деталь сначала обрабатывается на 1-м, затем на 2-м станке со следующими данными о времени обработки t_{ik} на каждом станке:

i \ k	1	2	3	4	5	6
1	5	12	4	20	18	14
2	9	12	15	6	12	5

300. Решить задачу 299, используя алгоритм Джонсона.

Решение. Алгоритм Джонсона для составления оптимального плана обработки на двух станках сводится к следующему простому правилу:

1) *располагают данные t_{ik} в двух строках таблицы;*

2) *находят среди всех t_{ik} наименьшее;*

3) *если $\min\{t_{ik}\} = t_{1k_0}$, то k_0-ю деталь помещают на первое место; если же $\min\{t_{ik}\} = t_{2k_0}$, то k_0-ю деталь помещают на последнее место;*

4) *если оказываются несколько равных минимальных чисел, то выбирают деталь с меньшим номером. Если $\min\{t_{ik}\} = t_{1k_0} = t_{2k_0}$, то k_0-ю деталь помещают первой;*

5) *после выполнения п. 2—4 вычеркивают k_0-й столбец и продолжают ту же процедуру с оставшимися $2n—2$ величинами t_{ik}, начиная с п. 2.*

Так, на начальном этапе наименьшим в таблице оказалось число 4, соответствующее 3-й детали ($\min\{t_{ik}\} = t_{13} = 4$), поэтому 3-ю деталь следует поместить первой. Для этого мы заранее подготавливаем такую же таблицу с пустыми клетками, в первую колонку которой записываем данные для 3-й детали. Вычеркнув в исходной таблице 3-й столбец, находим вновь $\min\{t_{ik}\} = t_{11} = t_{26} = 5$.

i \ k	3	1	2	5	4	6
1	4	5	12	18	20	14
2	15	9	12	12	6	5

Согласно п. 4 помещаем 1-ю деталь на первое место (за 3-й). Теперь после вычеркивания 1-го столбца получили $\min\{t_{ik}\} = t_{26} = 5$, следовательно, 6-ю деталь помещаем на последнее место. Вычеркнув и этот 2-й столбец, получаем $\min\{t_{ik}\} = t_{24} = 6$. Поэтому 4-ю деталь помещаем перед 6-й. Теперь в таблице осталось только 2 столбца для 2-й и 5-й деталей. Имеем $\min\{t_{ik}\} = t_{25} = t_{12} = t_{22} = 12$. Согласно п. 4 выбираем деталь с меньшим номером, т. е.

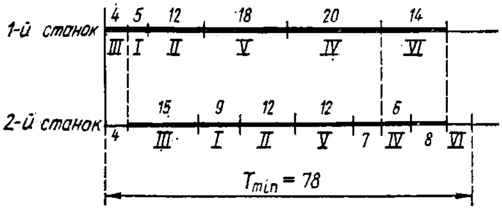

РИС. 18

2-ю, а для нее ориентируемся на t_{12}, следовательно, помещаем ее первой (точнее, первой из оставшихся).

В результате получили оптимальную последовательность (3, 1, 2, 5, 4, 6). Общее время обработки и время простоя 2-го станка можно получить с помощью линейной диаграммы (рис. 18).

На линии, соответствующей 1-му станку, отложены в масштабе времена обработки согласно найденной оптимальной последовательности. Внизу указаны римскими цифрами номера деталей. На 2-м станке неизбежны простои (указаны тонкой линией), так как деталь можно начать обрабатывать только после того, как закончится ее обработка на 1-м станке (например, III) и как закончится обработка предыдущей детали. Минимальное время обработки оказалось $t_{\min} = 78$ и время простоя 2-го станка 19. При произвольном порядке обработки (например, в обратном найденному порядку) получили бы $T = 100$ и время простоя 41.

301. Найти оптимальный план обработки 10 деталей на двух станках при следующей матрице $\| t_{ik} \|$:

i \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	15	14	12	20	25	5	9	16	30	8
2	23	18	10	17	8	40	16	6	20	12

302. (Транспортная задача с фиксированными доплатами.) В обычной транспортной задаче с ресурсами a_i ($i = 1, \ldots, p$), потребностями b_k ($k = 1, \ldots, q$) и матрицей затрат $\| c_{ik} \|$ вводится условие, согласно которому устанавливается дополнительная оплата за эксплуатацию каждого маршрута ($i - k$) в размере постоянной величины d_{ik}, если $x_{ik} > 0$, и равной нулю, если $x_{ik} = 0$.

Составить оптимальный план перевозки, минимизирующий суммарные затраты.

Решение. Модель задачи будет отличаться от обычной модели транспортной задачи только особым видом целевой функции: минимизировать

$$z = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} (c_{ik}x_{ik} + d_{ik}y_{ik}) \tag{13}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k \quad (k = 1, \ldots, q), \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i \quad (i = 1, \ldots, p), \tag{15}$$

$$x_{ik} \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, p; \ k = 1, \ldots, q), \tag{16}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{ik} = 0; \\ 1, & \text{если } x_{ik} > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Отличие этой модели от обычной транспортной в том, что функция содержит альтернативные переменные y_{ik}. Для того чтобы прийти к модели целочисленной задачи, введем для y_{ik} следующие условия:

а) $0 \leqslant y_{ik} \leqslant 1$,

б) y_{ik} — целочисленные

в) $x_{ik} \leqslant \min\{a_i, b_k\} y_{ik}$.

Первые два условия обеспечивают, что y_{ik} будут принимать только два значения: 0 или 1. Условие в) связывает значения, принимаемые y_{ik}, со значениями x_{ik} в соответствии с условием (17). Действительно, если $y_{ik} = 0$, то из в) следует, что и $x_{ik} = 0$, если $y_{ik} = 1$, то условие в) никаких ограничений на x_{ik} не налагает, так как всегда $x_{ik} \leqslant \min\{a_i, b_k\}$. Наоборот, если в оптимальном решении $x_{ik} = 0$, то и $y_{ik} = 0$, поскольку при $y_{ik} = 1$ величина z может быть уменьшена при замене y_{ik} нулем; если $x_{ik} > 0$, то из в) следует, что $y_{ik} = 1$.

Таким образом, приходим к следующей модели частично, а при целых a_i и b_k полностью целочисленной задачи: минимизировать (13) при условиях (14), (15), (16), а), б) и в).

303. Составить модель задачи целочисленного программирования по следующим числовым данным, соответствующим обозначениям предыдущей задачи: $a_i = 50$, $a_2 = 30$, $a_3 = 120$, $b_1 = 60$, $b_2 = 40$, $b_3 = 100$,

$$\|c_{ik}\| = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \quad \|d_{ik}\| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

304. (Задача оптимального размещения.) Имеются q пунктов потребления, потребности которых в некотором продукте измеряются величинами $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_q$. Для удовлетворения этих потребностей могут быть использованы p пунктов ($i = 1, \ldots, p$) возможного производства продукта. Задана матрица $\|c_{ik}\|$ затрат на перевозки единицы продукта из i-го пункта производства в k-й пункт потребления. В отличие от обычной транспортной задачи предполагается, что в каждом i-м пункте возможны n_i взаимоисключающих вариантов производства с объемами $a_{i1}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{in_i}$.

Определить оптимальный план размещения производства из условия минимизации затрат на транспортировку продукта.

Решение. Введем, как и в обычной транспортной задаче, переменные x_{ik}, означающие количество единиц продукта, перевозимых из i-го пункта производства в k-й пункт потребления. Тогда часть условий запишется в обычной форме транспортной модели: минимизировать

$$z = \sum_k \sum_i c_{ik} x_{ik} \tag{18}$$

при условиях

$$\sum_i x_{ik} = b_k \quad (k = 1, \ldots, q), \tag{19}$$

$$x_{ik} \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, p; \quad k = 1, \ldots, q). \tag{20}$$

Однако ограничения по ресурсам уже не могут быть выражены в форме $\sum_k x_{ik} \leqslant \sum_j a_{ij}$ (*), так как при этом не учтено, что в плане для данного i может фигурировать только один вариант производства. Поэтому введем альтернативные переменные y_{ij}, равные нулю, если вариант a_{ij} не включается в план, и единице, если этот вариант в план входит. Тогда ограничения (*) по ресурсам могут быть записаны в виде

$$\sum_k x_{ik} \leqslant \sum a_{ij} y_{ij} \quad (i = 1, \ldots, p). \tag{21}$$

Для того чтобы y_{ij} принимали для каждого i только два значения 0 или 1, введем следующие условия:

$$\sum_j y_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, p), \tag{22}$$

y_{ij} — неотрицательные и целочисленные. (23)

Выражения (18) — (23) описывают частично или (при целочисленных a_j и b_k) полностью целочисленную задачу.

305. Составить модель задачи оптимального размещения по следующим конкретным данным: $q = 3$, $p = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $a_{11} = 120$, $a_{12} = 150$, $a_{21} = 90$, $a_{22} = 80$, $a_{23} = 100$, $b_1 = 90$, $b_2 = 40$, $b_3 = 70$,

$$\| c_{ik} \| = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

306. Для удовлетворения спроса q потребителей, в количестве $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_q$ единиц продукции могут быть частично использованы имеющиеся предприятия-поставщики, а частично предприятия, реконструируемые или вновь строящиеся. Реальные или проектируемые производственные мощности этих предприятий составляют $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p$. Задана матрица $\| c_{ik} \|$ транспортных затрат на доставку продукции и вектор $\bar{C} = (c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_p)$, где c_i — производственные затраты на единицу продукции. Кроме того имеются еще «фиксированные» затраты d_i, связанные с реконструкцией или строительством новых предприятий (доля общих капиталовложений, рассчитанная на планируемый период, исходя из общего срока окупаемости). Эти фиксированные затраты $d_i = 0$, если $a_i = 0$, т. е. если i-й поставщик в плане не предусматривается, и $d_i > 0$, если $a_i > 0$.

Для имеющихся предприятий соответствующее $d_i = 0$, вне зависимости от a_i.

Составить модель задачи по определению оптимального плана размещения производства и транспортировки продукции из условия минимизации суммарных затрат.

Указание. Ввести альтернативные переменные

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_i = 0; \\ 1, & \text{если} \quad a_i > 0, \end{cases}$$

которые войдут в ограничения по строкам (подобно задаче 304) и в целевую функцию (как в транспортной задаче с фиксированными доплатами).

307. Общую сумму капиталовложений K необходимо распределить между q объектами ($k = 1, \ldots, q$), потребности которых измеряются суммами $b_1, \ldots, b_k, \ldots, b_q$, а ожидаемые прибыли $c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_q$. На каждый объект капиталовложения либо выделяются в необходимой сумме, либо совсем не выделяются.

Составить модель задачи целочисленного программирования, заключающейся в оптимальном распределении капиталовложений.

308. Решить предыдущую задачу при следующих конкретных данных: $q = 5$, $K = 1200$, $b_1 = 420$, $b_2 = 180$, $b_3 = 240$, $b_4 = 560$, $b_5 = 300$, $c_1 = 80$, $c_2 = 65$, $c_3 = 90$, $c_4 = 210$, $c_5 = 150$.

309. (Задача с логическим условием «либо — либо».) Фабрика может производить n различных продуктов ($k = 1, \ldots, n$), располагая для этого s видами ресурсов в количестве $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_s$. Для производства продуктов могут быть использованы m технологических способов ($j = 1, \ldots, m$). Заданы величины a_{ik}^j, характеризующие нормы расхода i-го ресурса на единицу k-го продукта при изготовлении его j-м способом, и цены p_k единицы k-го продукта.

Составить модель задачи по определению оптимального набора продуктов и способов их производства из условия максимизации товарной продукции при дополнительном условии, согласно которому любой k-й продукт либо должен производиться в количестве не меньшем d_k, либо совсем не производиться.

Решение. Без дополнительного альтернативного условия задача относится к числу общих планово-производственных задач (см. гл. VIII, § 5). Введя переменные x_{kj}, означающие количество единиц k-го продукта, изготовляемых j-м способом, составим модель такой задачи: максимизировать

$$z = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{j=1}^{m} x_{kj} \right), \tag{24}$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a^{j}_{ik} x_{kj} \leqslant a_i \qquad (i=1, \ldots, s), \tag{25}$$

$$x_{kj} \geqslant 0 \quad (k=1, \ldots, n; \quad j=1, \ldots, m). \tag{26}$$

Теперь для включения дополнительного условия введем n альтернативных переменных:

$$y_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k\text{-й продукт не производится;} \\ 1, & \text{если } k\text{-й продукт производится в количестве } \geqslant d_k. \end{cases} \tag{*}$$

Для того чтобы y_k принимали лишь два значения 0 или 1, введем два условия:

$$0 \leqslant y_k \leqslant 1 \quad \text{и} \quad y_k \text{ — целочисленные.} \tag{27}$$

Теперь необходимо обеспечить, чтобы y_k принимали значения в соответствии с условиями (*).

Обозначим через M_k величину, заведомо бо́льшую, чем количество k-го продукта, которое может быть произведено при данных ресурсах. Так например, эта величина может быть определена по одному из ресурсов (пусть первому) в предположении, что он используется только на изготовление k-го продукта.

Тогда можно принять, что $M_k = \max\limits_{j} \left\{ \frac{a_1}{a^1_{kj}} \right\}$. Введем для каждого k два дополнительных ограничения

$$\sum_{j=1}^{m} x_{kj} \geqslant y_k d_k \qquad (**) \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{kj} \leqslant y_k M_k. \qquad (***)$$

Теперь, если $y_k = 0$, то из второго неравенства следует $\sum\limits_{j} x_{kj} \leqslant 0$, откуда получаем $x_k = \sum\limits_{j} x_{kj} = 0$. Если же $y_k = 1$, то неравенство (***), благодаря выбору величины M_k становится тривиальным $\left(x_k = \sum\limits_{j} x_{kj} \leqslant M_k \right)$, а из (**) получаем $x_k \geqslant d_k$, что соответствует исходным условиям. Наоборот, если $x_k = 0$, то из неравенства (**) следует, что $y_k = 0$, и если $x_k \geqslant d_k$, то неравенство (**) удовлетворяется при любом y_k (0 или 1), а из (***) следует $y_k = 1$.

310. Составить математическую модель и решить предыдущую зачачу при следующих конкретных данных: $n = 3$, $s = 2$, $p_1 = 12$, $p_2 = 25$, $p_3 = 8$, $d_1 = 30$, 1-й продукт либо производится в количестве не менее 30 ед., либо совсем не производится.

Значения a_i и a^j_{ik}

Ресурсы	I способ			II способ		
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
1200 800	15 10	6 10	9 12	12 16	8 8	10 6

Указание. Составить модель задачи целочисленного программирования. Решение получить с помощью двух обычных задач линейного программирования: задачи с дополнительным ограничением $x_{11}+x_{12}\geqslant 30$ и задачи с ограничением $x_{11}+x_{12}=0$.

311. (Задача с невыпуклыми областями.) Привести к целочисленной задачу максимизации $z=x_1+x_2$ в области, изображенной на рис. 19.

Решение. Область допустимых решений задачи, показанная на рис. 19, состоит из двух несвязанных треугольников и может быть описана альтернативными условиями: или область I

$$3x_1+2x_2\leqslant 24,\ x_1\geqslant 5,\ x_2\geqslant 0,$$

или область II

$$x_1+2x_2\leqslant 16,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 6.$$

Для описания этой области введем две альтернативные переменные y_1 и y_2 согласно следующим условиям:

$$y_1=\begin{cases}0, & \text{если точка принадлежит области I,}\\ 1, & \text{если — области II;}\end{cases}$$

$$y_2=\begin{cases}0, & \text{если точка принадлежит области II,}\\ 1, & \text{если — области I.}\end{cases}$$

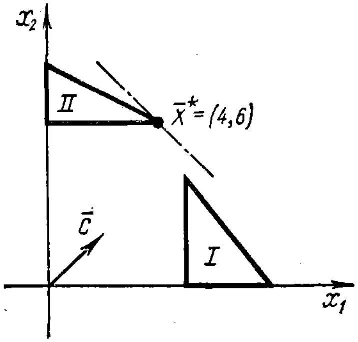

РИС. 19

Тогда указанную область можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{r}x_1-5\geqslant -5y_1\\ 3x_1+2x_2-24\leqslant 24y_1\end{array}\right\}\ (\text{А})\qquad \left.\begin{array}{r}x_2-6\geqslant -6y_2\\ x_1+2x_2-16\leqslant 16y_2\end{array}\right\}\ (\text{Б})$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ y_1+y_2=1,\ y_1,\ y_2 \text{— целые. (В)}$$

Действительно, если $y_1=0$, то из $y_1+y_2=1$ получаем $y_2=1$. Тогда неравенства (А) принимают вид $x_1\geqslant 5$, $3x_1+2x_2\leqslant 24$, т. е. задают область I. При этом из (Б) получаем неравенства $x_2\geqslant 0$ и $x_1+2x_2\leqslant 32$, которые выполняются автоматически (так как $\max x_1=8$, $\max x_2=8$ и, следовательно, $\max\{x_1+2x_2\}=24$). Наоборот, при $y_1=1$ и $y_2=0$ получаем из (А) тривиальные условия $x_1 \geqslant 0$ и $3x_1 + 2x_2 \leqslant 48$ (в то время, как $\max\{3x_1 + 2x_2\} = 40$). В это же время условия (Б) дают $x_2 \geqslant 6$ и $x_1 + 2x_2 \leqslant 16$, т. е. точку, лежащую в области II.

Таким образом, получаем окончательно следующую задачу частично целочисленного программирования: максимизировать $z = x_1 + x_2$ при условиях (А), (Б), (В).

Графическое решение задачи дает $\bar{X}^* = (4,\ 6)$ и $z_{\max} = 10$.

312. Привести к задаче целочисленного программирования следующую задачу: максимизировать $z = x_1 + 2x_2$ при условиях:

$$x_1 + x_2 \leqslant 8,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \text{ и либо } x_1 \geqslant 5, \text{ либо } x_2 \geqslant 4.$$

313. То же, при условиях $0 \leqslant x_1 \leqslant 6$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 7$ и либо $x_1 \leqslant 2$, либо $x_2 \leqslant 3$.

ГЛАВА XI

Нелинейное программирование. Общие положения

§ 1. СОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Общий вид модели задачи нелинейного программирования: максимизировать (минимизировать) целевую функцию

$$z = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = f(\bar{X}), \tag{1}$$

при условиях

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\} b_i \quad (i = 1, \dots m). \tag{2}$$

Здесь функции f и φ_i могут быть любыми, а знак $\left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\}$ означает, что при различных i ограничения (2) могут выражаться неравенствами (со знаком $\leq$ или $\geq$) или уравнениями. Условия неотрицательности переменных не выделены отдельно, а включаются в ограничения (2). На языке математического анализа такие задачи получили название *задач на условный экстремум* (см. § 5).

Если f и φ_i — линейные функции, то получаем модель задачи линейного программирования.

Процесс составления модели в конкретной задаче принципиально не отличается от составления модели задачи линейного программирования.

В задачах 314—323 составить математическую модель.

314. Четыре предприятия могут производить продукцию в урочное время в количествах 160, 250, 390, 200 ед. и дополнительно, используя сверхурочное время, в количествах 40, 50, 110, 50 ед. При этом затраты на производство единицы продукции по предприятиям составляют 30, 50, 40, 35 — при работе в урочное время и соответственно на 50% выше при работе в неурочное время. Продукция должна быть доставлена четырем потребителям в количествах 380, 250, 400 и 200 ед.

Транспортные расходы c_{ik} на перевозку единицы продукции от i-го предприятия ($i = 1, 2, 3, 4$) k-му потребителю ($k = 1, 2, 3, 4$) заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 30. & 40 & 35 \\ 30 & 40 & 30 & 20 \\ 25 & 45 & 30 & 40 \\ 42 & 36 & 28 & 34 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальную производственную программу предприятий и оптимальный план перевозок.

Указание. Кроме обычных переменных x_{ik} для обозначения перевозок от i-го предприятия k-му потребителю, ввести дополнительные переменные x_i, выражающие суммарный выпуск продукции i-го предприятия.

315. Найти оптимальное распределение общей суммы капиталовложений в 120 млн. руб. на строительство трех предприятий. При этом величина отдачи (в млн. руб.) к концу года на каждый млн. руб. капиталовложений зависит не только от предприятия, но и от величины отпущенных ему средств, убывая с ростом последних (в связи с затруднениями по их освоению).

Эти зависимости представлены в следующей таблице:

Предприятия	Размер кап. вл.	Отдача	Размер кап. вл.	Отдача	Размер кап. вл.	Отдача
I	до 15	1,5	15—30	0,5	выше 30	0
II	до 20	1,0	20—40	0,4	40—50	0,2
III	до 10	1,2	10—15	1,0	15—30	0,5

316. Определить место строительства завода между двумя пунктами сбыта, расстояние между которыми 100 км, и размер поставок в каждый из пунктов, если валовый выпуск продукции завода составляет 150 ед., а зависимость продажной цены единицы продукции от количества поставляемой продукции x_i ($i = 1, 2$) в каждый из пунктов сбыта и затрат на перевозки единицы продукции от расстояния y_i между заводом и пунктом сбыта задаются следующей таблицей:

Пункты сбыта	Продажная цена, руб./ед.	Затраты, руб./ед.
1	$15-0{,}1x_1$	$1{,}5+0{,}1y_1$
2	$12-0{,}08x_2$	$1{,}5+0{,}05y_2$

317. Предприятие может выпускать три вида продукции А, Б и В, располагая для этого ресурсами сырья в 1000 ед, которое расходуется в количестве 5, 2,5 и 2 ед. соответственно на каждую единицу продукции А, Б и В. Прибыль, получаемая предприятием на каждую единицу продукции, зависит от вида продукции и от общей величины расходуемых на него ресурсов согласно следующим данным:

Расход ресурсов	А		Б		В	
	до 100	100—200	до 200	200—400	до 300	300—600
Прибыль	5	3	10	6	4	2

Определить оптимальный план выпуска продукции.

318. Выпуск продукции может производиться двумя технологическими режимами, затраты при каждом из которых соответственно равны $21x_1^{4/3}$ и $4x_2^{3/2}$, где x_1 и x_2 — объем продукции, обрабатываемой соответственно по 1-му и 2-му технологическим режимам. При этом второй технологический режим предполагает использование привозного сырья и связан с дополнительными затратами на транспортировку в сумме $400x_2^{1/2}$. Определить оптимальное использование обоих технологических режимов, обеспечивающих общий выпуск продукции в количестве 100 ед.

319. Определить оптимальный размер партии закупаемого через разные промежутки времени сырья, если годовая потребность в нем составляет Q ед., расходы сырья равномерные, годовые затраты на хранение единицы сырья α и затраты по закупке новой партии β.

Указание. Если партия размером x расходуется равномерно в течение года, то среднегодовой запас сырья равен $\frac{x}{2}$.

320. Решить предыдущую задачу, если вместимость склада для хранения запасов не превышает D.

321. Определить оптимальную программу выпуска двух видов продукции с учетом ограниченных ресурсов сырья (120 кг), оборудования (300 станко-ч) и электроэнергии (280 квтч) при следующих нормах расхода на единицу продукции: сырья 3 и 2 кг/ед., электроэнергии 4 и 7 квтч. и оборудования $50—5x_1$ и $20 — 4x_2$, где x_1 и x_2 — искомое число производимых единиц 1-го и 2-го вида.

322. Рассматривается трехотраслевая модель народного хозяйства с технологической матрицей $\| a_{ik} \|$ ($i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3$), где a_{ik} — коэффициенты прямых затрат. Заданы коэффициенты прямых затрат труда (t_k) и капиталовложений (c_k), общий объем трудовых ресурсов T, потребности в конечном продукте (b_i), цены на импортируемые продукты (α_i) и на экспортируемые продукты $\beta_i = \gamma_i - \delta_i y_i$, где y_i — размер экспорта i-го продукта и максимально допустимый дефицит внешней торговли D (т. е. разность между суммарной стоимостью импорта и экспорта). Составить математическую модель по определению валового выпуска продукции, объема экспорта и импорта, при которых требуется минимум капиталовложений.

§ 2. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

323. В области, определенной неравенствами

$$x + 2y \leqslant 12, \qquad x + y \leqslant 9,$$

найти точки, в которых достигаются глобальные экстремумы следующих нелинейных целевых функций:

$$1)\ z = (x-2)^2 + (y-3)^2; \quad 2)\ z = 2(x-5)^2 + (y-7)^2;$$
$$3)\ z = (x-7)(y-1).$$

Решение. Область допустимых решений, общая для всех трех задач, построена на рис. 20.

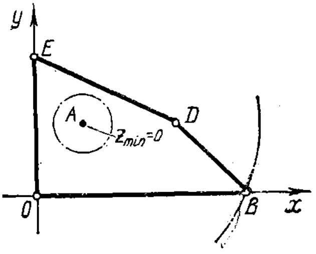

РИС. 20

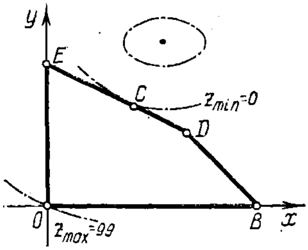

РИС. 21

1) Линии уровня представляют собой окружности с центром A (2; 3) и радиусом $r = \sqrt{z}$.

Из рисунка ясно, что $z_{\min} = 0$ достигается в точке A (2; 3), а $z_{\max}$ — в точке B (9; 0). Таким образом, получаем $z_{\min} = 0$ и $z_{\max} = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$.

2) Линии уровня представляют собой эллипсы, заданные уравнением $\frac{(x-5)^2}{z/2}+\frac{(y-7)}{z}=1$, т. е. с полуосями $a=\sqrt{z/2}$ и $b=\sqrt{z}$. Центр эллипса — точка (5; 7). На рис. 21 показан эллипс при $z=11$. Из графика видно, что $z_{\min}$ соответствует эллипсу, касающему границы области в точке C (4,2; 3,9). Дальнейшее уменьшение z приводит к линиям уровня, не имеющим общих точек с областью. Таким образом, точка C касания эллипса с прямой $x+2y=12$ соответствует оптимальному решению. Для определения координат этой точки воспользуемся равенством углового коэффициента прямой $k_{\text{п}}=-1/2$ угловому коэффициенту касательной к эллипсу (т. е. производной) в данной точке. Дифференцируя почленно уравнение эллипса и рассматривая y как неявную функцию от x, получим $4(x-5)+2(y-7)y'=0$, откуда

$$y'=-\frac{2(x-5)}{y-7}.$$

Приравняв эту производную значению $k_{\text{п}}=-1/2$, получим одно уравнение между для определения координат точки касания C. Присоединив к нему уравнение прямой, на которой лежит точка C, получим систему двух уравнений

$$\left.\begin{array}{r} 4(x-5)=y-7 \\ x+2y=12 \end{array}\right\},$$

откуда $x_C=\frac{38}{9}\approx 4{,}2$; $y_C=\frac{35}{9}\approx 3{,}9$ и $z_{\min}=-\frac{98}{9}\approx 11$.

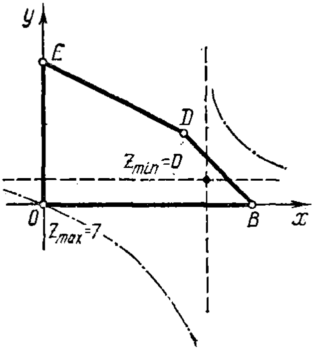

РИС. 22

Максимум z, как видно из рис. 21, может достигаться в точках O (0; 0) или B (9; 0). Для уточнения сравним значения z в этих точках. Непосредственной подстановкой находим $z(O)=99$ и $z(B)=81$, откуда $z_{\max}=99$ в точке O (0; 0).

3) Линиями уровня являются равносторонние гиперболы, асимптотами которых служат прямые $x=7$ и $y=1$ (рис. 22).

С ростом параметра z гиперболы отдаляются от точки пересечения асимптот (пунктирные линии). Наибольшее значение z соответствует гиперболе (нижней ветви), проходящей через точку O (0; 0), а наименьшее — гиперболе, вырождающейся в точку (7; 1). Таким образом, получаем $z_{\max}=7$ в точке $O\,(0;\ 0)$ и $z_{\min}=0$ в точке (7; 1).

324. В области решений системы неравенств

$$2x+5y\leqslant 30,\quad 2x+y\leqslant 14,\quad x\geqslant 0\quad y\geqslant 0$$

определить глобальные экстремумы функций:

1) $z=(x-4)^2+(y-8)^2$; 2) $z=(x-2)^2+(y-4)^2$;
3) $z=(x-7)^2+(y-7)^2$; 4) $z=(x-6)^2+(y-2)^2$.

325. В области решений системы неравенств

$$x^2+y^2\leqslant 36, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0$$

определить глобальные экстремумы функций:

1) $z=2x+y$; 2) $z=-x+2y$;
3) $z=(x-3)^2+(y-2)^2$; 4) $z=(x-4)^2+(y-6)^2$.

326. В области решений системы неравенств

$$(x-2)(y+1)\leqslant 16, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0$$

определить глобальные экстремумы функций:

1) $z=x+y$; 2) $z=(x-1)^2+(y-1)^2$;
3) $z=(x-4)^2+(y-3)^2$; 4) $z=-x+3y$.

327. В области решений системы неравенств

$$(x-5)^2+(y-3)^2\geqslant 9, \quad (x-5)^2+(y-3)^2\leqslant 36,$$
$$x+y\geqslant 8, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0$$

определить глобальные экстремумы функций:

1) $z=x+3y$; 2) $z=x+y$; 3) $z=x^2+y^2$; 4) $z=xy$.

328. В области решений неравенств

$$\left.\begin{array}{r} 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 5x+3y\leqslant 24, \\ y\geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{r} x\geqslant 3, \\ 3x+5y\leqslant 24, \\ y\geqslant 0 \end{array}\right\}$$

определить глобальные экстремумы функций:

1) $z=x+y$; 2) $z=(x-4)^2+(y-4)^2$,
3) $z=(x-3)^2+4(y-6)^2$; 4) $z=|x-5|+y$.

329. В области решений системы неравенств

$$y-|x-4|\leqslant 3, \quad 2\leqslant x\leqslant 6, \quad y\geqslant 0$$

определить глобальные экстремумы функций:

1) $z=x+y$; 2) $z=(x-7)^2+(y-7)^2$;
3) $z=(x-4)^2+(y-2)^2$; 4) $z=y-|x-4|$.

330. Построить области, заданные следующими системами неравенств, определив, какая из них ограниченная или неограниченная, открытая или замкнутая; указать границу области:

$$1)\ \left.\begin{array}{r} x-2y\leqslant 8,\\ x+3y<6\\ x=0,\ y\geqslant 0 \end{array}\right\};\qquad 2)\ \left.\begin{array}{r} x^2+y^2\leqslant 16\\ x^2+y^2>4 \end{array}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{array}{r} xy=4\\ 8x-y\geqslant 0\\ x-\frac{y}{3}\leqslant 0 \end{array}\right\};\qquad 4)\ \left.\begin{array}{r} 4x^2+9y^2\leqslant 36\\ x^2+4y^2\geqslant 4 \end{array}\right\}.$$

331. Найти и построить графически область определения следующих функций, указав свойства этой области (ограниченная или неограниченная, открытая или замкнутая):

$$1)\ z=\frac{1}{x}+y;\quad 2)\ z=\frac{1}{x^2+y^2};\quad 3)\ z=\frac{1}{\sqrt{xy}};$$

$$4)\ z=\frac{1}{x^2-y^2};\quad 5)\ z=\frac{1}{x-2y};\quad 6)\ z=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

332. Определить, какие из функций, указанных в предыдущей задаче, будут ограниченными, а какие — неограниченными в области, заданной неравенством $x^2+(y-2)^2\leqslant 1$.

§ 3. ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ И ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Отрезком, соединяющим две точки $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, называется множество точек X, удовлетворяющих уравнению

$$\overline{X}=t\overline{X}_1+(1-t)\,\overline{X}_2, \tag{3}$$

где $0\leqslant t\leqslant 1$.

Множество точек $\overline{X}$ называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя его точками ему принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки.

Теорема 1. *Пересечение* (общая часть) *выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

333. Доказать, что следующие области будут выпуклыми:

$$1)\ x^2+y^2\leqslant 16;\quad 2)\ 4x^2+9y^2\leqslant 36;\quad 3)\ x^2\leqslant y;$$

$$4)\ \left.\begin{array}{r} (x-2)^2+(y-4)^2\leqslant 9\\ (x-5)^2+(y-6)^2\leqslant 4 \end{array}\right\}.$$

Функция $z = f(\bar{X})$, заданная в выпуклой области Q, называется **выпуклой** или **вогнутой** в этой области, если для любых двух точек X_1 и $X_2 \in Q$ и любого числа $0 \leqslant t \leqslant 1$ выполняются неравенства:

$$f[t\bar{X}_1 + (1-t)\bar{X}_2] \geqslant tf(\bar{X}_1) + (1-t) f(\bar{X}_2)$$

для выпуклой функции, (4)

$$f[t\bar{X}_1 + (1-t)\bar{X}_2] \leqslant tf(\bar{X}_1) + (1-t) f(\bar{X}_2)$$

для вогнутой функции. (4′)

Различают еще **строго выпуклые (вогнутые)** функции, для которых указанные неравенства выполняются как строгие.

334. Доказать, что линейная функция многих переменных является нестрого выпуклой и нестрого вогнутой одновременно.

Указание. Записать функцию в виде $z = \bar{C}\bar{X}$.

335. Исследовать свойства выпуклости функции

$$y = ax^2.$$

Решение. Здесь $f(\bar{X}) = ax^2$ — функция одной переменной, заданная на всей действительной оси. Имеем

$$f[tx_1 + (1-t)x_2] = a[tx_1 + (1-t)x_2]^2 = a[t^2x_1^2 + (1-t)x_2^2 +$$
$$+ 2t(1-t)x_1x_2] = a(t^2x_1^2 + x_2^2 - 2tx_2^2 + t^2x_2^2 +$$
$$+ 2tx_1x_2 - 2t^2x_1x_2) = a[t^2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2tx_2(x_1 - x_2)].$$

Но $0 \leqslant t \leqslant 1$, следовательно, $t^2 \leqslant t$, т. е. $t^2(x_1 - x_2)^2 \leqslant t(x_1 - x_2)^2$, или

$$t^2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2tx_2(x_1 - x_2) \leqslant$$
$$\leqslant t(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2tx_2(x_1 - x_2) = tx_1^2 + (1-t)x_2^2.$$

Умножая обе части последнего неравенства на a, получим:

при $a > 0$

$a[tx_1 + (1-t)x_2]^2 \leqslant tax_1^2 + (1-t)ax_2^2$ — функция вогнутая;

при $a < 0$

$a[tx_1 + (1-t)x_2]^2 \geqslant tax_1^2 + (1-t)ax_2^2$ — функция выпуклая.

Теорема 2. *Линейная комбинация с положительными коэффициентами выпуклых (вогнутых) функций также будет функцией выпуклой (вогнутой).*

336. Доказать, что если $f(\bar{X})$ — выпуклая (вогнутая), то $-f(\bar{X})$ будет вогнутой (выпуклой) функцией.

Исследование свойств выпуклости производится непосредственно по определению с помощью неравенств (4) — (4′) (как в примере 335), с использованием указанных теорем, либо комбинированием того и другого приема.

337. Исследовать свойства выпуклости следующих функций: 1) $z = (x-2)^2 + y^2$; 2) $z = x^2 + 2xy + y^2$; 3) $z = 2x - x^2 - y^2$; 4) $z = 4 - 3x^2 - 2y^2 + x$; 5) $z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + 1$; 6) $z = x_1x_2$, при $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$; 7) $z = x_1^2 +$

$+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$; 8) $z=|x|$; 9) $z=4x_1-x_1^2+x_2^2+3x_2$; 10) $z=x_2-|x_1-2|$; 11) $z=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ при $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$.

338. Доказать, что если $f(\bar{X})$ — выпуклая (вогнутая) функция, то выпуклыми (вогнутыми) будут:

1) $f(\bar{X})+a$; 2) $f(\bar{X}+\bar{a})$; 3) $af(\bar{X})$ при $a>0$.

Теорема 3. *Область решений неравенства*

$$\varphi(\bar{X})\geqslant 0,$$

где $\varphi(\bar{X})$ *— выпуклая функция, является выпуклой.*

339. Доказать выпуклость областей, заданных следующими неравенствами, и построить их графически:

$$1)\ x^2+y^2\leqslant 16;\quad 2)\ (x-1)^2+3(y-2)^2\leqslant 18;$$

$$3)\ x^2-2x\leqslant 1;\quad 4)\ y-x^2\geqslant 0;$$

$$5)\ \left.\begin{matrix}(x-5)^2+(y-5)^2\leqslant 9\\ -3x+4y\leqslant 12\end{matrix}\right\};\quad 6)\ \left.\begin{matrix}(x-5)^2+(y-5)^2\leqslant 9\\ xy\geqslant 20\end{matrix}\right\};$$

$$7)\ \left.\begin{matrix}4x^2+9y^2\leqslant 36\\ x^2-y\leqslant 0\end{matrix}\right\};\quad 8)\ \left.\begin{matrix}x^2+y\leqslant 4\\ x^2-y\leqslant 4\end{matrix}\right\}.$$

§ 4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Квадратичной функцией (формой) от n переменных называется функция вида

$$f(\bar{X})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{ik}x_ix_k. \tag{5}$$

С каждой такой функцией связана симметрическая матрица n-го порядка $C=\|c_{ik}\|$. Диагональные элементы c_{ii} этой матрицы являются коэффициентами при x_i^2, а недиагональные элементы $c_{ik}=c_{ki}$ равны половине коэффициента при x_ix_k.

Так, например, квадратичной функции $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ соответствует матрица $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; функции $x_1^2-3x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3+x_3^2$ соответствует матрица $C=\begin{pmatrix}1 & -3/2 & 1/2\\ -3/2 & 0 & -1\\ 1/2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ и т. д.

Если при любом $\bar{X}$, кроме $\bar{X}=0$, выполняется неравенство $f(\bar{X})>0$ [или $f(\bar{X})<0$], то функция называется **положительно** (соответственно **отрицательно**) **определенной**.

Если при этом для некоторых $\bar{X}\neq 0$ возможно и равенство $[f(\bar{X})=0]$, то функция называется **неотрицательной (неположительной)**.

Если $f(\bar{X}) > 0$ при одних $\bar{X}$ и $f(\bar{X}) < 0$ при других $\bar{X}$, то функция называется **неопределенной**.

Примеры:

1) $z = x_1^2 + x_2^2$ — положительно определенная функция;

2) $z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$ — неотрицательная (так как $z > 0$ при $x_1 \neq x_2$ и $z = 0$ при $x_1 = x_2$);

3) $z = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2$ — неположительная;

4) $z = x_1^2 - x_2^2$ — неопределенная, так как $z > 0$ при $x_1^2 > x_2^2$ и $z < 0$ при $x_1^2 < x_2^2$.

Указанные свойства квадратичной функции можно установить в общем случае по знакам корней λ_i характеристического уравнения матрицы C, имеющего вид

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1n} \\ c_{i1} & \dots & c_{ik}-\lambda & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} & \dots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Для того чтобы квадратичная функция* (5) *была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения* (6) *были положительными (отрицательными).*

Если среди этих корней есть хотя бы один равный нулю — квадратичная функция неотрицательная (неположительная). Наконец, если имеются корни разного знака — квадратичная функция неопределенная.

Определение указанных свойств квадратичной функции важно в связи со следующей теоремой.

Теорема 2. *Неотрицательная квадратичная функция является вогнутой, а неположительная — выпуклой.*

340. Построить матрицы, соответствующие следующим квадратичным функциям:

1) $z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$; 2) $z = x_1^2 - x_2^2$; 3) $z = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
4) $z = x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2$; 5) $z = 2x_1x_2$; 6) $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
7) $z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2 - x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2$;
8) $z = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

341. Определить свойства квадратичных функций в задачах 340, 1) и 2).

Решение. 1) Имеем $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, откуда характеристическое уравнение запишется в виде

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, на основании теоремы 1 заключаем, что данная функция неотрицательная.

2) Имеем $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, откуда уравнение (6) запишется в виде

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0.$$

Корни уравнения $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1$ имеют разные знаки. Следовательно, на основании теоремы 1 заключаем, что функция неопределенная.

342. Определить свойства квадратичных функций в задачах 340 (3—8).

343. Определить, используя теорему 2, свойства выпуклости следующих квадратичных функций:

1) $z=x_1^2-x_1x_2$; 2) $z=x_1x_2-x_1x_3$; 3) $z=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$;

4) $z=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

5) $z=x_1x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

§ 5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ И СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

Функция $z=f(\bar{X})$ имеет в точке $\bar{X}_0$ **локальный максимум** или **минимум**, если найдется такая окрестность этой точки, что для всех $\bar{X}$ из этой окрестности будет выполняться неравенство

$$f(\bar{X})\leqslant f(\bar{X}_0)\ [\text{соответственно для минимума } f(\bar{X})\geqslant f(\bar{X}_0)].\quad (7)$$

Если неравенства (7) выполняются как строгие, то экстремум называется **сильным**, если как нестрогие, то **слабым**.

Из определения вытекает, что точки локального экстремума обязательно должны быть внутренними точками области.

Функция $z=f(\bar{X})$ имеет в заданной области Q **глобальный максимум** $[z_{\max}=f(\bar{X}_0)]$ или **минимум** $[z_{\min}=f(\bar{X}_0)]$, если неравенства (7) выполняются для любой точки области $(\bar{X}\in Q)$.

Глобальный экстремум может достигаться как во внутренней точке (совпадая в этом случае с одним из локальных), так и на границе области.

Теоремы об экстремумах

Теорема 1. *Функция $z=f(\bar{X})$, заданная в замкнутой ограниченной области, достигает в ней глобального максимума и глобального минимума.*

Теорема 2. *Любой локальный максимум выпуклой или локальный минимум вогнутой функции является одновременно глобальным.*

Теорема 3. *Сильный глобальный минимум выпуклой или максимум вогнутой функции, заданных в выпуклой области, может достигаться (а в замкнутой ограниченной области — достигается) только на границе области.*

Теорема 4. *Необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции $z=f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ в точке $\bar{X}_0=(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0)$ является равенство нулю всех частных производных первого порядка в этой точке:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=0 \qquad (k=1,\ \dots,\ n). \tag{8}$$

Точки, в которых выполняются равенства (8), называются **стационарными точками.**

Стационарные точки должны быть подвергнуты дополнительным исследованиям с помощью достаточных условий, для того чтобы установить, действительно ли в них достигается локальный экстремум и какой именно (максимум или минимум).

Еще сложнее обстоит дело с нахождением глобального экстремума, который может достигаться на границе области и в этом случае не совпадать с локальным экстремумом.

Однако в некоторых случаях могут помочь косвенные приемы, опирающиеся на теоремы 1—3.

I. Если заранее известно существование глобального экстремума у данной функции (например, на основании теоремы 1), то достаточно найти все стационарные точки и сравнить значения функции в этих точках с экстремальными значениями на границе области. Наибольшее значение соответствует глобальному максимуму, а наименьшее — глобальному минимуму. Определение экстремумов на границе области сводится к решению задачи, аналогичной исходной, но размерности на единицу меньшей.

II. Если функция выпуклая (вогнутая) и из уравнений (8) получена стационарная точка, то в ней достигается глобальный максимум (минимум).

III. Для отыскания глобального минимума выпуклой или глобального максимума вогнутой функции достаточно исследование экстремумов функции только на границе области.

344. Найти глобальные экстремумы функций в следующих задачах:

$$1)\ z=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2-11x_1-8x_2$$

$$\text{в области}\quad \left.\begin{array}{r} 3x_1+4x_2\leqslant 24\\ 3x_1+x_2\leqslant 15\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

$$2)\ z=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \ \text{ в области }\ \left.\begin{array}{r} x_1+3x_2\leqslant 15\\ x_1+x_2\leqslant 7\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

$$3)\ z=16x_1-4x_1^2+72x_2-9x_2^2-10 \text{ в области } x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$$

Решение. Функция z — квадратичная, заданная в замкнутой ограниченной области (рис. 23), поэтому, на основании теоремы 1, она достигает в этой области глобальных экстремумов (случай 1).

Находим стационарные точки путем решения системы уравнений (8):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x_1}=4x_1+x_2-11=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2}=2x_2+x_1-8=0 \end{array}\right\},\ \text{ откуда }\ x_1=2\ \text{ и }\ x_2=3.$$

Таким образом, получена единственная стационарная точка D (2;3), в которой $z_D = -23$. Теперь исследуем эту функцию вдоль границ области. Граница AB задается уравнением $3x_1 + 4x_2 = 24$, откуда $x_2 = 6 - \frac{3}{4}x_1$. Подставляя найденное значение x_2 в функцию z, получим $z_{AB} = \frac{29}{16}x_1^2 - 8x_1 - 12$. Ее стационарная точка E найдется, как для функции одной переменной из уравнения $\frac{dz_{AB}}{dx_1} = \frac{29}{8}x_1 - 8 = 0$, откуда $x_1 = \frac{64}{29}$, $x_2 = 6 - \frac{3 \cdot 64}{29 \cdot 4} = \frac{126}{29}$ и $z_E \approx -20{,}8$. Но граница AB, в свою очередь, имеет «границы» — точки A (0; 6) и B (4;3), значения функции в которых будут $z_A = -12$ и $z_B = -15$.

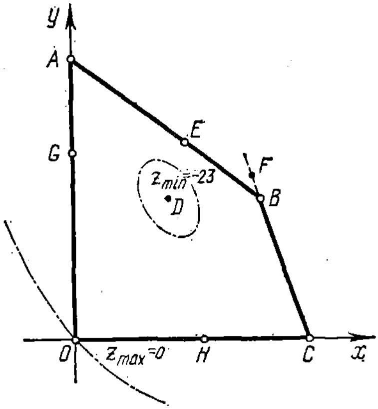

РИС. 23

Граница BC задается уравнением $3x_1 + x_2 = 15$, откуда $x_2 = 15 - 3x_1$. Подставляя в заданную функцию, получим $z_{BC} = 8x^2 - 62x_1 + 105$. Аналогично предыдущему, из $\frac{dz_{BC}}{dx_1} = 16x_1 - 62 = 0$ найдем $x_1 = \frac{31}{8}$ и $x_2 = \frac{27}{8}$, которые не удовлетворяют первому неравенству. Следовательно, данная стационарная точка F лежит вне области $OABC$ (рис. 23). Значения z_{BC} на «границах», т. е. в точках C (5;0) и B (4;3), равны $z_C = -5$ и $z_B = -15$.

Вдоль границы OA имеем $x_1 = 0$, откуда $z_{OA} = x_2^2 - 8x_2$. Из уравнения $\frac{dz_{OA}}{dx_2} = 2x_2 - 8 = 0$ находим $x_2 = 4$. Таким образом, получаем еще одну стационарную точку G (0; 4) и $z_G = -16$. Значение в точке O (0;0) будет $z_0 = 0$.

Вдоль границы OC имеем $x_2 = 0$, откуда $z_{OC} = 2x_1^2 - 11x_1$. Из уравнения $\frac{dz_{OC}}{dx_1} = 4x_1 - 11 = 0$ получаем $x_1 = \frac{11}{4}$. Итак, найдена последняя стационарная точка $H\left(-\frac{11}{4}; 0\right)$ и $z_H = -\frac{121}{8}$.

Для сравнения сведем данные об исследованных точках в таблицу.

Точки	D	E	A	B	C	G	O	H
Значения функции	-23	$-20{,}8$	-12	-15	-5	-16	0	$-\frac{121}{8}$

Следовательно, глобальный максимум достигается в точке O (0; 0) и равен $z_{\max} = 0$, а глобальный минимум $z_{\min} = -23$ — в точке D (2; 3) (см. рис. 23).

2) Функция z, как сумма двух вогнутых функций $(x_1 - 1)^2$ и $(x_2 - 2)^2$, также является вогнутой. Следовательно, если существует стационарная точка, то в ней достигается глобальный минимум. Глобальный же максимум будет достигаться (область замкнутая, ограниченная) на границе (рис. 24).

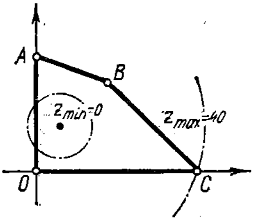

РИС. 24

Записав уравнения (8), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 1) = 0\\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 2) = 0\end{aligned}\right\},$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $z_{\min} = 0$.

Для отыскания глобального максимума исследуем функцию вдоль границы, как это делалось в предыдущем примере.

OA : $x_1 = 0$, откуда $z_{OA} = (x_2 - 2) + 1$; $\dfrac{dz_{OA}}{dx_2} = 2(x_2 - 2) = 0$; $x_2 = 2$ и $z_D = 1$. Далее, $z_O = 5$ и $z_A = 10$.

AB : $x_1 + 3x_2 = 15$, откуда $x_1 = 15 - 3x_2$ и $z_{AB} = 10x_2^2 - 88x_2 + {}$ $+ 200$; $\dfrac{dz_{AB}}{dx_2} = 20x_2 - 88 = 0$; $x_2 = \dfrac{22}{5}$, $x_1 = \dfrac{9}{5}$ и $z_E = \dfrac{32}{5}$.

BC : $x_1 + x_2 = 7$, откуда $x_2 = 7 - x_1$ и $z_{BC} = 2x_1^2 - 12x_1 + 26$; $\dfrac{dz_{BC}}{dx_1} = 4x_1 - 12 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ и $z_B = 8$. Данная точка совпала с вершиной области B.

OC : $x_2 = 0$, откуда $z_{OC} = (x_1 - 1)^2 + 4$; $\dfrac{dz_{OC}}{dx_1} = 2(x_1 - 1) = 0$; $x_1 = 1$ и $z_F = 4$.

Наконец, в точке C (7; 0) имеем $z_C = 40$.

Сопоставляя найденные значения z вдоль точек на границе области, устанавливаем, что $z_{\max} = 40$ достигается в точке C (7; 0).

Полученный результат легко подтвердить графическим решением (см. рис. 24).

3) Функцию z после выделения полных квадратов можно представить в виде $z = -4(x_1 - 2)^2 - 9(x_2 - 4)^2 + 60$. Так как $-(x_1 - 2)^2$ и $-(x_2 - 4)^2$ являются выпуклыми функциями, то функция z является выпуклой.

Следовательно, если будет найдена стационарная точка, то в ней будет достигаться глобальный максимум функции. Имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_1} &= 16 - 8x_1 = 0\\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 72 - 18x_2 = 0\end{aligned}\right\}, \quad \text{откуда} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4 \ \text{и} \ z_{\max} = 60.$$

Что касается исследования глобального минимума, то в данном случае дело обстоит сложнее. Область задания функции — первый квадрант — является неограниченной (рис. 25) и поэтому заранее неизвестно, будет ли существовать глобальный минимум. Но в случае, если он существует, его следует искать на границе области, каковой являются положительные полуоси Ox_1 и Ox_2. Однако уже для одной из полуосей (например, Ox_1) имеем $x_2=0$ и функция $z=16x_1-4x_1^2-100$ неограниченно убывает с ростом x_1. Таким образом, заключаем, что глобального минимума функция не имеет $(z_{\min}\to-\infty)$.

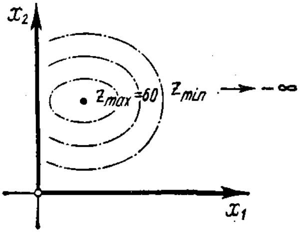

Рис. 25

345. Исследовать глобальные экстремумы функций, заданных в замкнутой ограниченной области:

1) $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ в области $|x|\leqslant 5$, $|y|\leqslant 1$;

2) $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$ в области $x+y\leqslant 4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;

3) $z=x^3+y^3-3xy$ в области $0\leqslant x\leqslant 2$, $-1\leqslant y\leqslant 2$;

4) $z=x^2-y^2$ в области $x^2+y^2\leqslant 16$;

5) $z=x^2y-x^3y-x^2y^2$ в области $x+y\leqslant 8$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;

6) $z=x^3+8y^3-6xy+1$ в области $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 1$;

7) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$ в области $|x+y|\leqslant 4$, $|x-y|\leqslant 4$;

8) $z=xy^2+x^2y-3x^2-3y^2$ в области $x+y\geqslant 1$, $x+y\leqslant 16$.

346. Исследовать глобальные экстремумы, используя свойства выпуклости функций:

1) $z=4x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2-x_3^2+11$ (max);

2) $z=4x_1^2+3x_2^2+x_3^2-16x_1-4x_3$ (min);

3) $z=4(x_1-3)-2(x_2-1)^2-(x_3-2)^2$ (max);

4) $z=x_1^4+2x_1^2+(x_2-3)^2+2x_3^2+8x_3$ (min).

347. Исследовать глобальные экстремумы выпуклых или вогнутых функций в заданной области:

1) $z=2x_1+3x_2-2x_1^2$ в области $x_1+2x_2\leqslant 4$, $x_1+x_2\leqslant 2$, $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$;

2) $z = 4(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + (x_3 - 2)^2$ в области $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 15$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$;

3) $z = x_1 x_2$ в области $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$;

4) $z = 2x_1 + 3x_2 - x_3^2 - (x_4 - 2)^2 - x_1^2 - 3x_2^2$ в области $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$.

§ 6. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Точка $\bar{X}_0$, в которой функция $z = f(X)$ достигает локального или глобального экстремума, при дополнительном условии, что $\bar{X}$ удовлетворяет уравнениям

$$\varphi_i(\bar{X}) = b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

называется точкой **условного локального** или соответственно **условного глобального экстремума**, а уравнения (9) называются **уравнениями связи**. Это означает, что в неравенствах (7) проводится сравнение значения $f(\bar{X}_0)$ со значениями $f(\bar{X})$ не во всех точках ε-окрестности $\bar{X}_0$ или области Q, а лишь в тех из них, которые удовлетворяют уравнениям связи (9).

Соответственно экстремумы функции $z = f(\bar{X}_0)$ без дополнительных условий (9) называются **безусловными экстремумами**.

Безусловный экстремум, достигаемый в точке $\bar{X}_0$, удовлетворяющей уравнениям связи, одновременно будет и условным экстремумом, но условный экстремум, вообще говоря, не будет безусловным.

Исследование условного экстремума (который будет обозначаться через $\hat{z}_{\max}$ или $\hat{z}_{\min}$) можно проводить двумя методами:

I. Метод непосредственного исключения. Из уравнений (9) определяется некоторое число s переменных (максимально $s = m$, если все уравнения связи независимые) через остальные $n - s$ переменных, которые подставляются в функцию $z = f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$. В результате получается функция от $n - s$ переменных, которая исследуется на безусловный экстремум.

II. Метод множителей Лагранжа. Составляется функция Лагранжа

$$L(x_1, \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = \\ = f(x_1, \ldots x_m) + \sum \lambda_i [b_i - \varphi_i(x_1, \ldots x_n)], \tag{10}$$

зависящая от n переменных x_k и m множителей Лагранжа λ_i, и исследуются безусловные экстремумы этой функции.

Если f и φ_i являются дифференцируемыми функциями, то необходимые условия экстремума функции L дают систему $n + m$ уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots n), \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{11'}$$

каждое решение которых определяет стационарную точку $\bar{X}_0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может достигаться условный экстремум функции $z = f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ при условиях (9).

Дальнейшее исследование этих точек ведется, как и в случае безусловного экстремума.

348. Исследовать условные экстремумы функции $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$, заданной в области $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 10$ при условии $x + y = 7$.

Решение. Область определения — замкнутая ограниченная (прямоугольник $OABC$), поэтому глобальные экстремумы, в том числе и условные, существуют. Уравнение связи есть прямая, отрезок которой DE (рис. 26) располагается внутри области.

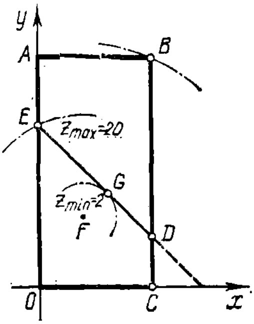

РИС. 26

Следовательно, значения функции должны сравниваться не во всей области $OABC$, а только вдоль этого отрезка DE. На рисунке показаны линии уровня, представляющие собой концентрические окружности с центром в точке F (2; 3). Как видно из рисунка, безусловные экстремумы достигаются в точках F (где $z_{\min} = 0$) и B (где $z_{\max} = 58$); при этом первый является одновременно локальным и глобальным минимумом, а второй — только глобальным максимумом. Если же рассматривать только точки, лежащие на отрезке DE, то из того же рисунка видно, что условный глобальный максимум достигается в точке E (0; 7), где $\hat{z}_{\max} = 20$, а условный глобальный минимум (он же и локальный) достигается в точке G, в которой окружность касается отрезка DE. Определив координаты этой точки из равенства угловых коэффициентов (см. § 1), получим $x_G = 3$, $y_G = 4$ и $z_G = \hat{z}_{\min} = 2$. Теперь решим задачу аналитически.

Первый способ (метод исключения). Из уравнения связи имеем $y = 7 - x$, откуда $\hat{z} = (x-2)^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 12x + 20$. Получили функцию от одной переменной x, для которой стационарная точка найдется из уравнения $\frac{\partial \hat{z}}{dx} = 4x - 12 = 0$, откуда $x = 3$, $y = 2$ и $\hat{z}_G = 2$. На границах отрезка, т. е. в точках D (5; 2) и E (0; 7), получим $\hat{z}_D = 10$ и $\hat{z}_E = 20$. Сравнивая найденные три значения функции, устанавливаем, что $\hat{z}_{\min} = 2$ и $\hat{z}_{\max} = 20$, что совпадает с результатами графического решения.

Второй способ (метод Лагранжа). Составляем функцию

$$L(x, y, \lambda) = (x-2)^2 + (y-3)^2 - \lambda(7 - x - y).$$

Уравнения (11) и (11′) в данном случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=2(x-2)-\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=2(y-3)-\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=7-x-y=0.\end{aligned}\right\}$$

Перенося λ в правые части первых двух уравнений и приравнивая левые части, получим $2(x-2)=2(y-3)$. Решая это уравнение совместно с третьим, получим $x=3$ и $y=2$, что совпадает с ранее найденной точкой G. Значение z в этой точке будет $z_G=2$. Таким образом, найдена стационарная точка G. Дальнейшее исследование проводится, как и в предыдущем способе, т. е. путем сравнения значений z_G в стационарной точке со значениями на границах области — точках D и E.

Заметим, что при решении системы уравнений (11) и (11′) переменная λ численно не определялась, а выполняла лишь вспомогательную роль.

349. Определить условные глобальные экстремумы функций в следующих задачах с помощью метода непосредственного исключения и метода Лагранжа, сопроводив решение графической иллюстрацией:

1) $z=x^2+y^2$ при $x+y=1$;

2) $z=3x^2+2y^2-3x+1$ при $x^2+y^2=4$;

3) $z=2(x-1)^2+3(y-3)^2$ в области $x+y\leqslant 10$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ при $x+y=6$;

4) $z=x^2-y^2$ в области $x^2+y^2\leqslant 16$, при $x-y=4$;

5) $z=x+y$ в области $0\leqslant x\leqslant 6$, $0\leqslant y\leqslant 4$, при $(x-4)^2+(y-3)^2=4$;

6) $z=(x-3)^2+(y-5)^2$ в области $x^2+y^2\leqslant 10$ при $y-2x=5$.

К исследованию условных экстремумов приводит задача определения глобальных экстремумов в заданной области при изучении поведения функции на ее границе.

350. Использовать метод Лагранжа при решении задач: 1) 349 (2); 2) 349(4); 3) 349(5).

351. Определить с помощью метода Лагранжа стационарные точки при исследовании условного экстремума функций:

1) $z=x_1+x_2+x_3$ при $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$;

2) $z=x_1x_2x_3$ при $x_1+x_2+x_3=6$ и $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=12$;

3) $z=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ при $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$;

4) $z=x_1x_2x_3x_4$ при $x_1+x_2+x_3+x_4=4$ и $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$.

5) $z=2x_1+3x_2^2+x_3^2$ при $x_1+x_2+x_3=8$ и $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$.

Метод Лагранжа может применяться и в том случае, когда дополнительное условие задается в форме неравенства. Так, если требуется найти экстремумы функции $z=f(\bar{X})$ при условии $\varphi(\bar{X})\leqslant b$, то поступают следующим образом:

1) находят стационарные точки безусловного экстремума функции $z=f(\bar{X})$ из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n)$$

и отбирают из них те, которые удовлетворяют неравенству

$$\varphi(\bar{X})<b;$$

2) находят стационарные точки условного экстремума функции $z=f(\bar{X})$ при уравнении связи $\varphi(\bar{X})=b$, т. е. из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_k}=0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n),$$

$$\varphi(\bar{X})=b;$$

3) найденные в п. 1) и 2) точки исследуются в дальнейшем, как это делалось и для безусловного экстремума.

352. Найти глобальные условные экстремумы функции $z=(x-2)^2+(y-3)^2$ при условии $x^2+y^2\leqslant 52$.

Решение. Область замкнутая ограниченная (рис. 27), следовательно, в ней достигаются глобальные экстремумы.

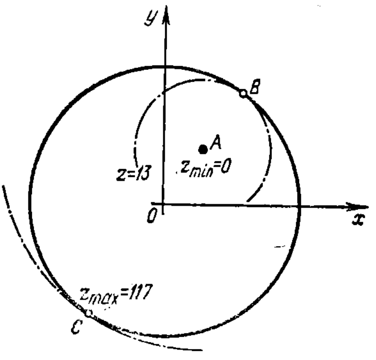

Рис. 27

1) Ищем стационарные точки для безусловного экстремума из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2(x-2)=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=2(y-3)=0\end{aligned}\right\},$$

откуда $x=2,\ y=3$ и $z_A=0$. Так как $2^2+3^2=13<52$, то найденная точка лежит внутри области.

2) Строим функцию Лагранжа, заменив неравенство на уравнение $x^2+y^2=52$. Получим $L=(x-2)^2+(y-3)^2+\lambda(52-x^2-y^2)$. Далее,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x-2) - 2\lambda x = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2(y-3) - 2\lambda y = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 52 - x^2 - y^2 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Из первых двух уравнений, умножив 1-е на $y \neq 0$ и 2-е на $x \neq 0$, получим $y(x-2) = \lambda xy$ и $x(y-3) = \lambda xy$, откуда $y(x-2) = x(y-3)$, или, после раскрытия скобок, $2y = 3x$. Подставляя $y = \frac{3}{2}x$ в уравнение связи, получим $x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 52$, откуда $x = \pm 4$ и $y = \pm 6$. Итак, получили новые две стационарные точки: B (4; 6), в которой $\hat{z}_B = 13$, и C (—4; —6), в которой $\hat{z}_C = 117$. Сравнивая значения во всех трех стационарных точках, находим, что $\hat{z}_{\min} = 0$ и $\hat{z}_{\max} = \hat{z}_C = 117$. В точке же B достигается условный локальный минимум.

353. Используя метод Лагранжа, определить стационарные точки в следующих задачах на условный экстремум:

1) $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 12$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$;

2) $z = x_1x_2x_3$ при $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \leqslant 8$;

3) $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3$ при $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 9$;

4) $z = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ при $2x_3^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2 \leqslant 1$;

5) $z = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ при $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4$;

6) $z = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1x_2x_3 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 15$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

Множители Лагранжа могут быть использованы для оценки влияния вариации свободных членов уравнений связи на величину экстремального значения функции: точная формула $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \lambda_i$; приближенная формула $\Delta z^* \approx \lambda_i \Delta b_i$.

354. Определить изменение $z_{\max}$ и $z_{\min}$ в задаче 349(1) при замене уравнения связи на $x + y = 1{,}1$.

355. То же в задаче 349(2) при увеличении радиуса окружности на 0,2 и уменьшении на 0,3.

356. Определить минимум функции $z = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2$ при $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$. На сколько изменится величина минимумума при изменении свободных членов уравнений связи: первого на $+0{,}1$ и второго на $-0{,}5$?

ГЛАВА XII

Численные методы решения задач нелинейного программирования

§ 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается задача: максимизировать

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k + c_0}{\sum_{k=1}^{n} d_k x_k + d_0}, \tag{1}$$

при условиях

$$\sum a_{ik} x_k = a_{i0} \qquad (i = 1, \ \dots, \ m), \tag{2}$$

$$x_k \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ \dots, \ n). \tag{3}$$

Очевидно, что в области решений (2) — (3) выражение $\sum_{k=1}^{n} d_k x_k + d_0 \neq 0$ (в противном случае $z_{\max} \to \infty$), т. е. сохраняет постоянный знак. Будем считать его положительным*. Обозначим

$$\sum d_x x_k + d_0 = \frac{1}{y_0} \tag{4}$$

и введем новые переменные

$$y_k = y_0 x_k \qquad (k = 1, \ \dots, \ n) \tag{5}$$

В новых переменных модель (1) — (3) примет вид: максимизировать

$$z = \sum_k c_k y_k + c_0 y_0 \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_k a_{ik} y_k - a_{i0} y_0 = 0 \qquad (i = 1, \ \dots, \ m), \tag{7}$$

$$\sum_k d_k y_k + d_0 y_0 = 1, \tag{8}$$

$$y_k \geqslant 0 \quad (k = 1, \ \dots, \ n) \quad \text{и} \quad y_0 \geqslant 0. \tag{9}$$

---

* Это условие не снижает общности задачи, так как в случае, когда знаменатель отрицательный, знак минус можно относить к числителю.

Получили модель задачи линейного программирования, которая может быть решена обычным симплексным методом.

Из оптимального решения $\bar{Y}^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*, y_0^*)$ задачи (6) — (9) при $y_0^* > 0$ получаем, с помощью соотношений (5), оптимальное решение исходной задачи. В случае, когда $y_0^* = 0$, имеем $\Sigma d_k x_k^* + d_0 \to \infty$, откуда следует неограниченность области. В этом случае максимум z (конечный или бесконечный) достигается в бесконечно удаленных точках.

357. Решить следующую задачу дробно-линейного программирования: максимизировать

$$z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 &= 11 \end{aligned}\right\}, \quad x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_5 \geq 0.$$

Решение. Обозначим

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{y_0}, \quad y_1 = y_0 x_1, \quad y_2 = y_0 x_2, \ \ldots, \ y_5 = y_0 x_5.$$

Тогда придем к линейной модели (6) — (9), которая в данном случае запишется в виде: максимизировать $z = 3y_1 - y_2$ при условиях

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 - y_3 + 5y_0 &= 0 \\ -y_1 + 3y_2 + y_4 - 7y_0 &= 0 \\ 3y_1 - y_2 + y_5 - 11y_0 &= 0 \\ y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad y_1 \geq 0, \ \ldots, \ y_5 \geq 0, \ y_0 \geq 0.$$

Здесь 1-е (после умножения на —1), 2-е и 3-е уравнения разрешены относительно базисных переменных y_3, y_4 и y_5. Следовательно, для образования исходного опорного решения введем лишь одну искусственную переменную u в последнее уравнение. После этого заполняем исходную симплексную таблицу и приступаем к выполнению итерации.

После двух итераций получаем оптимальное решение

$$y_1^* = 1, \ y_2^* = 0, \ y_3^* = \frac{26}{11}, \ y_4^* = \frac{32}{11}, \ y_5^* = 0 \text{ и } y_0^* = \frac{3}{11}.$$

В соответствие с формулами (5) находим оптимальное решение исходной задачи $x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = \frac{11}{3}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{y_3^*}{y_0^*} = \frac{26}{3}$, $x_4^* = \frac{y_4^*}{y_0^*} = \frac{32}{3}$, $x_5^* = 0$ и $z_{\max} = 3$.

358. Решить следующие задачи дробно-линейного программирования:

1) $z=\frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}$ (max),
$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2+x_4=6 \\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

2) $z=\frac{x_1-x_2+x_3}{2x_1+x_3+1}$ (max),
$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+3x_3=8 \\ -x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_3\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

3) $z=\frac{2x_1-3x_2}{3x_1+x_2}$ (max),
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1-x_2+x_3=4 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=6 \\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_4\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

4) $z=\frac{x_1+3x_2}{2+x_1+x_2}$ (min),
$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2-x_3=4 \\ 3x_1-x_2+x_4=6 \\ x_1+x_2+x_5=3 \\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

5) $z=\frac{x_1+2x_2-x_3}{3x_1+x_2+5x_3}$ (max),
$$\left.\begin{array}{l} -3x_1+6x_2+x_3\leqslant 12 \\ -x_1+7x_2+2x_3\leqslant 12 \\ 2x_1-4x_2-x_3\geqslant 1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

6) $z=\frac{2x_1-3x_2+1}{x_1+x_2+3}$ (min),
$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+2x_2-x_3-x_4=20 \\ 3x_1-x_2-x_4=10 \\ 2x_1-3x_2+x_5=11 \\ 2x_1+5x_2+x_6=35 \\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_6\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

7) $z=\frac{x_1-x_2+3}{2x_1+3x_2+1}$ (max),
$$\left.\begin{array}{l} -2x_1+3x_2\leqslant 9 \\ x_1+x_2\leqslant 6 \\ 2x_1-x_2\leqslant 10 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

8) $z=\frac{x_1-2x_2}{3x_1+x_2+2}$ (min),
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+x_2\geqslant 7 \\ -x_1+4x_2\leqslant 5 \\ 4x_1-3x_2\leqslant 17 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\};$$

9) $z=\frac{2x_1-x_2-3}{x_1+2}$ (max),
$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2\geqslant 5 \\ 2x_1-x_2\geqslant 1 \\ x_1-3x_2\leqslant 1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\}.$$

§ 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается модель задачи квадратичного программирования: максимизировать

$$z=\sum c_kx_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{jk}x_jx_k, \qquad (10)$$

при условиях

$$\Sigma a_{ik}x_k = a_{i0} \quad (i=1, \ldots, m), \qquad (11)$$
$$x_k \geqslant 0 \quad (k=1, \ldots, n),$$

где $\Sigma\Sigma c_{jk}x_jx_k$— отрицательно определенная квадратичная функция.

Так как при этом z является выпуклой функцией (см. гл. XI, § 4), то соотношения (10) — (11) характеризуют модель задачи выпуклого программирования, в которой любой локальный максимум является глобальным. Последний может достигаться как внутри области, так и на ее границе.

Оптимальное решение $X^* = (x_1^*, \ldots x_k^*, \ldots x_n^*)$ задачи (10) — (11) может быть найдено как опорное решение системы уравнений

$$\Sigma a_{ik}x_k = a_{i0} \quad (i=1, \ldots, m),$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ik} + u_k = 0 \quad (k=1, \ldots, n), \qquad (12)$$

удовлетворяющее условиям

$$x_k \geqslant 0, \ u_k \geqslant 0 \quad (k=1, \ldots, n) \qquad (13)$$

и

$$x_k u_k = 0 \quad (k=1, \ldots, n), \qquad (14)$$

где λ_i — множители Лагранжа и u_k — дополнительные переменные.

При этом, если система (11) имеет допустимое решение (т. е. решение $X > 0$), то существует искомое оптимальное решение задачи (10) — (11).

Опорное решение системы уравнений (11) — (12) можно найти с помощью алгоритма симплексного метода, примененного к задаче максимизации $T = -\sum_i v_i$, где v_i — искусственные переменные, введенные в уравнения (11) — (12).

При использовании симплексного алгоритма необходимо лишь дополнительно учитывать условие (14), запрещающее одновременное нахождение в базисе переменных x и u с одинаковым индексом.

359. Решить следующую задачу квадратичного программирования: максимизировать

$$z = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2,$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 8 \end{aligned}\right\}, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0.$$

Решение. Функция z представляет собой сумму линейной функции $32x_1 + 120x_2$ (которую можно рассматривать как выпуклую) и квадратичной функции $f(X) = -4x_1^2 - 15x_2^2$. Последняя является отрицательно определенной, следовательно, также выпуклой.

Искомое оптимальное решение найдется как опорное решение системы (11) — (12) при условиях (13) и (14); для данной задачи имеем

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+5x_2+x_3 \qquad &=20 \\ 2x_1-\ x_2 \qquad +x_4&=\ 8 \end{aligned}\right\}, \qquad (11')$$

$$\left.\begin{aligned} 32-\ 8x_1-2\lambda_1-2\lambda_2+u_1&=0 \\ 120-30x_2-5\lambda_1+\ \lambda_2+u_2&=0 \\ -\ \lambda_1 \qquad +u_3&=0 \\ -\ \lambda_2+u_4&=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (12')$$

$$x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0,\ \ u_1 \geqslant 0,\ \ \ldots,\ \ u_4 \geqslant 0 \qquad (13')$$

$$x_1u_1=0,\ \ x_2u_2=0,\ \ x_3u_3=0,\ \ x_4u_4=0. \qquad (14')$$

Поскольку переменные λ_1 и λ_2 не имеют ограничений на знак (т. е. являются произвольными), исключим их из системы (12′). Для этого из последних двух уравнений найдем $\lambda_1 = u_3$ и $\lambda_2 = u_4$ и подставим в предыдущие два уравнения. После очевидных упрощений придем к системе

$$\left.\begin{array}{llllll} 2x_1+\ 5x_2+x_3 & & & & &= 20 \\ 2x_1-\ \ x_2 \quad +x_4 & & & & &= \ 8 \\ 8x_1 & -u_1 & +2u_3+2u_4+v_1 & & &= 32 \\ \quad 30x_2 & & -u_2+5u_3+u_4 & & +v_2 &=120 \end{array}\right\}, \quad (A)$$

где $v_1 \geqslant 0$, $v_2 \geqslant 0$ — искусственные переменные, которые мы ввели только в последние два уравнения, так как первые два разрешены относительно базисных переменных x_3 и x_4.

В системе (А) все переменные неотрицательные. Для отыскания искомого опорного решения этой системы будем решать симплексным методом задачу максимизации $T = -v_1 - v_2$ при условиях (А) и дополнительном ограничении (14′) на выбор базиса.

После III итерации получили оптимальное решение, удовлетворяющее условиям (14′), которое, таким образом, является оптимальным решением задачи квадратичного программирования:

$$\bar{X}=\left(\frac{5}{2},\ 3,\ 0,\ 6\right) \quad \text{и} \quad z_{\max}=230.$$

Замечание. Разрешающий столбец на каждой итерации выбирается по отрицательной оценке с одновременным учетом условий (14).

Так, например, на I итерации при выборе разрешающего столбца по оценке —7 пришлось бы ввести в базис u_3 (вместо v_1 или v_2), что невозможно, так как в базисе уже есть x_3. Аналогично нельзя выбрать столбец с оценкой —1 и т. д.

360. Решить следующие задачи квадратичного программирования:

$$1)\quad z=-x_1-2x_2+x_2^2 \ (\min),$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &\leqslant 6 \\ x_1+2x_2 &\leqslant 4 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0;$$

	Баз. перем.										—1	—1	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	
	x_3	20	2	5	1								4
	x_4	8	2	—1		1							
—1	v_1	32	8				—1		2	2	1		
—1	v_2	120		$\boxed{30}$				—1	5	—1		1	4
	T	—152	—8	—30			1	+1	—7	—1			
	x_3	0	$\boxed{2}$		1			1/6	—5/6	1/6			0
	x_4	12	2			1		—1/30	1/6	—1/30			6
—1	v_1	32	8				—1		2	2	1		4
	x_4	4		1				—1/30	1/6	—1/30			
	T	—32	—8						—2	—2			
	x_1	0	1		1/2			1/12	—5/12	1/12			
	x_4	12			—1	1		—1/5	1	—1/5		—	12
—1	v_1	32			—4		—1	—2/3	16/3	4/3	1		6
	x_2	4		1				—1/30	1/6	—1/30			24
	T	—32			4			2/3	—16/3	—4/3			
	x_1	5/2	1		3/16		—5/64	1/32		3/16			
	x_4	6			—1/4	1	3/16	—3/40		—9/20	—	—	
	u_3	6			—3/4		—3/16	—1/8	1	1/4			
	x_2	3		1	1/8		1/8	—1/80		—3/40			
	T	0											

2) $z=x_1^2+x_2^2-8x_1-10x_2$ (min),

$$3x_1+2x_2+x_3=6,$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0;$$

3) $z=2x_1-3x_2-x_1^2-3x_2^2$ (max),

$$\left.\begin{aligned}3x_1+x_2+x_3+x_4&=16\\-x_1+3x_2-x_3+x_4&=4\end{aligned}\right\},$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0,\quad x_4\geqslant 0;$$

4) $z=2x_1x_2-x_1^2-x_2^2$ (max),

$$\left.\begin{aligned}2x_1-x_2&\leqslant 6\\x_1+2x_2&\leqslant 10\end{aligned}\right\},$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.$$

361. В пятиугольнике с вершинами $O(0;\ 0)$, $A\ (0;\ 6)$, $B\ (5;\ 8)$, $D\ (10;\ 4)$ и $E\ (8;\ 0)$ найти экстремумы следующих квадратичных функций:

1) $z=x_1^2+x_2^2-6x_1-4x_2$ (min);

2) $z=18x_1+16x_2-3x_1^2-x_1x_2-5x_2^2$ (max);

3) $z=20x_1+16x_2-x_1^2-x_2^2$ (max); 4) $z=x_1x_2$ (max);

5) $z=2x_1^2+3x_2^2-40x_1-48x_2$ (min);

6) $z=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$ (min).

362. Решить следующие задачи квадратичного программирования:

1) $z=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1+x_2$ (min),

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3&\leqslant 12\\2x_1+x_2+x_3&\leqslant 6\end{aligned}\right\},$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0;$$

2) $z=x_1-x_2^2-2x_1x_3$ (max),

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2&=8\\x_2+x_3&=4\end{aligned}\right\},$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0;$$

3) $z=(x_1+x_2+x_3)^2$ (min),

$$0\leqslant x_1\leqslant 2,\quad 0\leqslant x_2\leqslant 4,$$
$$0\leqslant x_3\leqslant 6;$$

4) $z=x_1-x_1^2+2x_2-x_3^2$ (max),

$$x_1+2x_2-x_3=6$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0.$$

§ 3. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Градиентные методы относятся к приближенным методам решения задач нелинейного программирования. В общем случае они обеспечивают получение оптимального решения с помощью бесконечного процесса последовательных приближений. Однако в некоторых случаях процесс может закончиться и через конечное число итераций.

Градиентные методы могут применяться к любой задаче нелинейного программирования, приводя лишь к локальному, а не глобальному экстремуму. Поэтому они оказываются более эффективными при решении задач выпуклого программирования, где всякий локальный экстремум есть одновременно и глобальный.

Начинать расчет можно с любого допустимого решения.

Пусть дана функция $z = f(\bar{X})$, где $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$. **Градиентом** $\nabla f(\bar{X}^0)$ этой функции в точке $\bar{X}_0$ называется вектор, координатами которого служат значения в этой точке частных производных первого порядка по соответствующей переменной, т. е.

$$\nabla f^0 = \nabla f(\bar{X}^0) = \left(\frac{\partial f(\bar{X}^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{X}^0)}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{X}^0)}{\partial x_n}\right). \quad (15)$$

Антиградиентом называется вектор $-\nabla f(\bar{X}^0)$.

Дифференциал функции, приближенно равный ее полному приращению, находится из скалярного произведения

$$dz = \nabla f \cdot \Delta\bar{X} \approx \Delta z, \quad (16)$$

где

$$\Delta\bar{X} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n).$$

Градиент функции задает в данной точке направление *наискорейшего роста* функции, антиградиент, соответственно, — *наискорейшего убывания* функции.

Перемещение из точки X_0 вдоль градиента означает перемещение на величину

$$\Delta\bar{X} = \lambda \cdot \nabla f^0. \quad (17)$$

363. Вычислить градиент следующих функций в заданных точках: 1) $z = x^2y - 2xy + \frac{x}{y}$, $\bar{X}^0 = (1, 2)$; 2) $z = x_1^3 - 2x_1x_2$, $\bar{X}^0 = (0, 1)$; 3) $z = x_1^2 + x_2^2$, $\bar{X}^0 = (2, 1)$; 4) $z = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$, $\bar{X}^0 = (1, 0)$.

364. Построить линии уровня, вычислить и построить градиент следующих функций в данных точках: 1) $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{X}^0 = (4, 5)$; 2) $z = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$, $\bar{X}^0 = (6, 4)$; 3) $z = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 2)^2$, $\bar{X}^0 = (3, 3)$; 4) $z = 2x_1 - x_1^2 - x_2$, $\bar{X}^0 = (1, 2)$.

365. Доказать, что градиент перпендикулярен линии уровня, проведенной через данную точку.

366. Доказать, что перемещение вдоль градиента на достаточно малое удаление от заданной точки соответствует максимальному изменению функции.

367. Определить градиент для линейной функции $z = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$ и объяснить графически полученный результат.

368. Построить линии наискорейшего спуска и наискорейшего подъема из звеньев с шагом $\lambda = 0{,}2$ в задачах 364 (1 — 4).

При нахождении безусловного экстремума функции $z = f(\bar{X})$ (т. е. при отсутствии ограничений) необходимо на каждой итерации выбирать шаг перемещения (множитель λ), обеспечивающий наибольшее возрастание функции Δz.

Перемещение из точки $\bar{X}^0$ в точку $\bar{X}'$ приводит к изменениюфункции

$$\Delta z = f(\bar{X}') - f(\bar{X}^0) = f(x_1', \ldots, x_n') - f(x_1^0, \ldots, x_n^0), \qquad (18)$$

где

$$x_1' = x_1^0 + \lambda \frac{\partial f^0}{\partial x_1}, \ \ldots \ x_k' = x_k^0 + \lambda \frac{\partial f^0}{\partial x_k}, \ \ldots \ x_n' = x_n^0 + \lambda \frac{\partial f^0}{\partial x_n}.$$

Величина, λ, при которой на данной итерации достигается наибольшее изменение Δz, может быть определена из условий экстремума (18).

Необходимое условие экстремума дает уравнение

$$\frac{d\,\Delta z}{d\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)' \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^0 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)' \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^0 = (\nabla f)' \cdot (\nabla f)^0 = 0, \qquad (19)$$

где значки «$'$» и «^{0}» означают значения частных производных и градиента в новой точке $\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda \nabla f^0$ и исходной $\bar{X}^0$.

Если определение λ по уравнению (19) связано со сложными вычислениями, то шаг λ, наоборот, выбирают достаточно малым, чтобы не перейти в область убывания функции.

369. Определить градиентным методом максимум функции $z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$, начав итерационный процесс с точки $\bar{X} = (4, 5)$. Сопроводить решение графической интерпретацией.

Решение. В данном случае $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4 - 2x_1$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2 - 2x_2$.

I итерация. Имеем

$$\nabla f^0 = (4 - 2 \cdot 4,\ 2 - 2 \cdot 5) = (-4,\ -8),\ \bar{X}' = (4,\ 5) + \lambda \nabla f^0 =$$
$$= (4 - 4\lambda,\ 5 - 8\lambda) \text{ и } \nabla f' = [4 - 2(4 - 4\lambda),\ 2 - 2(5 - 8\lambda)] =$$
$$= (-4 + 8\lambda,\ -8 + 16\lambda).$$

Подставляя в (19), получим

$$\frac{d\,\Delta z}{d\lambda} = \nabla f' \cdot \nabla f^0 = (-4 + 8\lambda)(-4) + (-8 + 16\lambda)(-8) = 80 - 160\lambda = 0,$$

откуда $\lambda^0 = 0{,}5$. Так как $\dfrac{d^2\,\Delta z}{d\lambda^2} = -160 < 0$, то найденное значение λ является точкой максимума Δz.

С помощью величины λ^0 получаем новую точку $\bar{X}' = [4 + 0{,}5(-4),\ 5 + 0{,}5(-8)] = (2,\ 1)$.

II итерация. Начальная точка $\bar{X}' = (2,\ 1)$; $\nabla f' = (4 - 2 \cdot 2,\ 2 - 2 \cdot 1) = (0,\ 0)$.

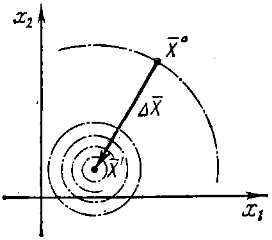

РИС. 28

Следовательно, $\bar{X}' = (2,\ 1)$ является стационарной точкой и дальнейшее перемещение вдоль градиента невозможно (рис. 28).

Так как функция z выпуклая, то в найденной точке достигается глобальный максимум $z_{\max} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2^2 - 1^2 + 5 = 10$ (в начальной точке $z_0 = -10$).

370. В следующих задачах найти экстремум функций с помощью градиентного метода, начиная итерационный процесс с точки $\bar{X}^0$ и сопровождая решение графическим изображением линий уровня и линии наискорейшего спуска (подъема):

1) $z = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2$ (min), $\bar{X} = (0,\ 0)$;
2) $z = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2$ (min), $\bar{X}^0 = (1,\ 0)$;
3) $z = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1$ (min), $\bar{X}^0 = (5,\ 3)$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$;
4) $z = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$ (max), $\bar{X}^0 = (5,\ 10)$.

371. Найти максимум функции $z = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2$, начиная итерационный процесс с точек: 1) $\bar{X}^0 = (0,\ 0)$; 2) $\bar{X}^0 = (7,\ 4)$; 3) $\bar{X}^0 = (3,\ 10)$; 4) $\bar{X}^0 = (6,\ 6)$.

В задачах математического программирования наличие ограничений в форме уравнений или неравенств налагает дополнительное условие на выбор λ, при котором новая точка не выйдет за пределы области допустимых значений.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования, в которой ограничения заданы в форме линейных неравенств *:

максимизировать выпуклую функцию

$$z = f(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_n), \qquad (20)$$

при условиях

$$\sum_k a_{ik}x_k \leqslant a_{i0} \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m), \qquad (21)$$

$$x_k \geqslant 0 \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n). \qquad (22)$$

Пусть на данной итерации перемещение осуществляется из точки $\bar{X}_0 = (x_1^0,\ \ldots,\ x_k^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ в направлении вектора $\bar{e} = (e_1,\ \ldots, e_n)$ (который не обязательно должен совпадать с градиентом ∇f) в новую точку $\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda\bar{e}$. Изменение функции составит $\Delta z = \nabla f(\bar{X}^0)\bar{e}$. Обозначим номерами $i = i'$ и $k = k'$ те из неравенств (21) и (22), которые в точке $\bar{X}^0$ выполняются как строгие неравенства.

---

* Если среди ограничений имеются уравнения, то указанными ранее методами (см. гл. III, § 1) можно их привести к неравенствам.

Определим величины α, β и ε из соотношений

$$\alpha = \begin{cases} \min\limits_{i'} \dfrac{a_{i'0} - \sum\limits_k a_{i'k} x_k^0}{\sum\limits_k a_{i'k} e_k} \text{ по тем } i', \text{ для которых } \sum a_{i'k} e_k > 0, \\ \infty, \text{ если при всех } i' \text{ будет } \sum a_{i'k} e_k \leqslant 0; \end{cases} \tag{23}$$

$$\beta = \begin{cases} \min\limits_{k'} \dfrac{-x_{k'}^0}{e_{k'}}, \text{ по тем } k', \text{ для которых } e_{k'} < 0, \\ \infty, \text{ если при всех } k' \text{ будет } e_{k'} \geqslant 0; \end{cases} \tag{24}$$

$$\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}. \tag{25}$$

Величина ε является максимально допустимым значением для λ, при котором перемещение не выйдет из области допустимых значений.

Если начальная точка $\bar{X}^0$ лежит внутри области (т. е. при всех i ограничения (21) выполняются как строгие неравенства), то направление перемещения $\bar{e}$ выгодно выбирать по градиенту (т. е. $\bar{e} = \nabla f^0$). Если же начальная точка $\bar{X}^0$ для данной итерации лежит на границе области (т. е. для некоторых i неравенства (21) выполняются как равенства), то вектор $\bar{e}$ может быть определен из решения следующей задачи линейного программирования:

максимизировать

$$T = \nabla f(\bar{X}^0)\,\bar{e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^0}{\partial x_k} e_k \tag{26}$$

при условиях

$$\sum_i a_{ik} e_k \leqslant 0, \tag{27}$$

где i распространяется на те неравенства (21), которые в точке $\bar{X}^0$ выполняются как равенства,

$$\sum_k e_k + \sum_{k'} (e'_{k'} + e''_{k'}) \leqslant 1, \tag{28}$$

$$e_k \geqslant 0, \quad e'_{k'} \geqslant 0, \quad e''_{k'} \geqslant 0, \tag{29}$$

$$e'_{k'} e''_{k'} = 0, \tag{30}$$

где

$$e'_{k'} - e''_{k'} = e_{k'}. \tag{31}$$

Порядок выполнения очередной итерации следующий.

1) *Определяется направление перемещения $\bar{e}$ из решения задачи* (26) — (30).

2) *Максимально возможная величина перемещения ε определяется из соотношений* (23) — (25).

3) *Из условия максимизации Δz находится величина λ^**. Для этого либо решается уравнение (19), когда перемещение осуществляется вдоль градиента, либо аналогичное уравнение

$$\frac{d\,\Delta z}{d\lambda} = \nabla f' \bar{e}, \tag{19'}$$

когда перемещение происходит по направлению $\bar{e} \neq \nabla f^0$.

4) Находится величина перемещения $\lambda = \min\{\varepsilon, \lambda^*\}$.

5) Вычисляется новая точка $\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda\bar{e}$ (или $\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda\nabla f^0$), которая принимается начальной на следующей итерации.

6) Расчет прекращается либо по достижении стационарной точки ($\nabla f = 0$), либо когда Δz в результате последней итерации оказалось в пределах заданной точности вычислений.

372. Решить градиентным методом следующую задачу выпуклого программирования: максимизировать

$$z = 10x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2,$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leqslant 40 \end{aligned}\right\}, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Для данной функции имеем $\nabla f = (10 - 2x_1, 16 - 2x_2)$. Пусть итерационный процесс начинается с точки $\bar{X}^0 = (1, 2)$, являющейся допустимым решением системы неравенств (рис. 29).

I итерация. 1) Составляем задачу (26) — (30). Здесь $\nabla f^0 = (8, 12)$. Для начальной точки $\bar{X}^0$ оба неравенства выполняются как строгие неравенства ($1 + 2\cdot2 < 16$ и $5\cdot1 + 2\cdot2 < 40$). Поэтому имеем $i = 1$ и 2. Далее, в этой же точке $x_1 = 1 > 0$ и $x_2 = 2 > 0$, поэтому $k' = 1$ и 2. В соответствии с (31) будем иметь $e_1 = e_1' - e_1''$ и $e_2 = e_2' - e_2''$. Теперь можем записать модель (26) — (30): максимизировать

$$T = 8e_1 + 12e_2 = 8e_1' - 8e_1'' + \\ + 12e_2' - 12e_2'', \quad (26')$$

при условиях

$$e_1' + e_1'' + e_2' + e_2'' \leqslant 1, \quad (28')$$

$$e_1' \geqslant 0, \quad e_1'' \geqslant 0, \quad e_2' \geqslant 0, \quad e_2'' \geqslant 0, \quad (29')$$

$$e_1'e_1'' = 0, \quad e_2'e_2'' = 0. \quad (30')$$

Условия (27) в данном случае отсутствуют, так как неравенства (21) в начальной точке $\bar{X}^0$ выполняются как строгие неравенства. Задачу (26') — (30') можно было бы решить и общим симплексным методом, однако наличие только одного ограничения (28') позволяет сразу же определить оптимальное решение $e_2' = 1$ и $e_1' = 0$, $e_1'' = 0, e_2'' = 0$ или, на основании (31), $e_1 = 0$ и $e_2 = 1$.

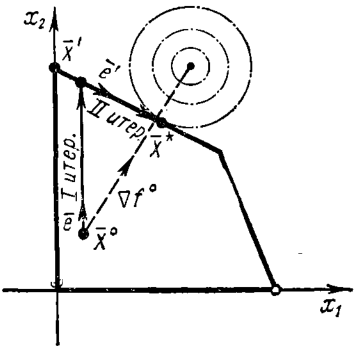

РИС. 29

Следовательно, направление перемещения задается вектором $\bar{e} = (0, 1)$. Как видно из рис. 29, найденное направление не является наилучшим, которое совпадает с градиентом.

2) Определяем максимально возможную величину перемещения. Вычисляем $\sum\limits_k a_{ik}e_k$ для $i' = 1$ и $i' = 2$. Имеем $a_{11}e_1 + a_{12}e_2 = 1\cdot0 +$

$+ 2 \cdot 1 = 2 > 0$ и $a_{21}e_1 + a_{22}e_2 = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 > 0$. Поэтому

$$\alpha = \min\left\{\frac{16-(1 \cdot 1+2 \cdot 2)}{2}, \ \frac{40-(5 \cdot 1-2 \cdot 2)}{2}\right\} = \frac{11}{2}, \qquad (23')$$

$$\beta = \infty, \qquad (24')$$

откуда $\varepsilon = \min\left\{\frac{11}{2}, \ \infty\right\} = \frac{11}{2}$.

3) Вычисляем λ^* из условия максимизации Δz. Имеем $\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda\bar{e} = (1, 2) + \lambda\,(0, 1) = (1, 2 + \lambda)$. Теперь находим

$$\nabla f' = [10-2 \cdot 1, \ 16-2\,(2+\lambda)] = (8, \ 12-2\lambda).$$

Тогда уравнение (19′) запишется в виде

$$\frac{d\,\Delta z}{d\lambda} = (8, \ 12-2\lambda)\,(0, \ 1) = 12-2\lambda = 0, \text{ откуда } \lambda^* = 6.$$

Так как $\frac{d^2\,\Delta z}{d\lambda^2} - 2 < 0$, то при найденном значении $\lambda^* = 6$ достигается максимум Δz.

4) Величина перемещения λ определяется из выражения

$$\lambda = \min\,(\varepsilon, \ \lambda^*) \min\left\{\frac{11}{2}, \ 6\right\} = \frac{11}{2}.$$

5) Новая точка $\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda\bar{e} = (1, \ 2) + \frac{11}{2}\,(0, \ 1) = \left(1, \ \frac{15}{2}\right)$.

Эта точка оказалась лежащей на граничной прямой, соответствующей 1-му неравенству, т. е. тому, которому соответствует найденное значение α (см. рис. 29). Приступаем к выполнению II итерации.

II итерация. Принимаем $\bar{X}^0 = \left(1, \ \frac{15}{2}\right)$.

1) $\nabla f^0 = \left(10-2 \cdot 1, \ 16-2 \cdot \frac{15}{2}\right) = (8, \ 1)$. Подставляя координаты точки $\bar{X}^0$ в заданные неравенства, получаем $1+2 \cdot \frac{15}{2} = 16$ и $5 \cdot 1+2 \cdot \frac{15}{2} = 20 < 40$. Следовательно, 1-е неравенство выполняется как равенство $(i = 1)$, а 2-е — как строгое неравенство $(i' = 2)$. Далее, $x_1 = 1 > 0$ и $x_2 = \frac{15}{2} > 0$, поэтому $k' = 1$ и 2 и $e_1 = e_1' - e_1''$, $e_2 = e_2' - e_2''$.

Составляем модель (26) — (30): максимизировать

$$T = 8e_1 + e_2 = 8e_1' - 8e'' + e_2' - e_2'', \qquad (26')$$

при условиях

$$1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 = e_1' - e_1'' + 2e_2' - 2e_2'' \leqslant 0, \qquad (27')$$

$$e_1' + e_1'' + e_2' + e_2'' \leqslant 1, \qquad (28')$$

$$e_1' \geqslant 0, \ e_1'' \geqslant 0, \ e_2' \geqslant 0, \ e_2'' \geqslant 0, \qquad (29')$$

$$e_1'e_1'' = 0, \quad e_2'e_2'' = 0. \qquad (30')$$

Данную задачу будем решать симплексным методом.

	Баз. перем.		8	—8	1	—1			$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	e'_1	e''_1	e'_2	e''_2	u_1	u_2	
	u_1	0	1	—1	2	—2	1		0
	u_2	1	1	1	1	1	—	1	1
	T		—8	8	—1	1	·	·	
8		0	1	—1	2	—2	1	·	
		1	·	2	—1	3	—1	1	
	T	·	·	·	15	—15	8	·	
8		2/3	1	1/3	4/3	·	+1/3	2/3	
—1		1/3	·	2/3	—1/3	1	—1/3	1/3	
	T	15	·	10	10	·	3	5	

После II итерации получили $e'_1=\frac{2}{3}$, $e''_2=\frac{1}{3}$ и $e''_1=e'_2=0$. Следовательно, $e_1=e'_1-e''_1=\frac{2}{3}$ и $e_2=e'_2-e''_2=-\frac{1}{3}$.

Таким образом, направление дальнейшего перемещения ~~за~~дается вектором $\bar{e}=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$.

Как показано на рис. 29, этот вектор направлен вдоль границы области.

2) Определяем ε. Так как в новой начальной точке только 2-е неравенство выполняется как строгое неравенство и для него $\sum\limits_k a_{ik}e_k=\sum a_{2k}e_k=5\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}>0$, то

$$\alpha=\frac{40-\left(5\cdot 1+2\cdot\frac{15}{2}\right)}{8/3}=\frac{15}{2}.$$

Далее, $e_1=\frac{2}{3}>0$ и $e_2=-\frac{1}{3}<0$, откуда $\beta=\frac{-15/2}{-1/3}=\frac{45}{2}$.

Следовательно, $\varepsilon=\min\left\{\frac{15}{2},\ \frac{45}{2}\right\}=\frac{15}{2}$.

3) Вычисляем λ^*. Имеем для II итерации $\bar{X}'=\bar{X}^0+\lambda\bar{e}=\left(1,\ \frac{15}{2}\right)+\lambda\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)=\left(1+\frac{2\lambda}{3},\ \frac{15}{2}-\frac{\lambda}{3}\right)$. Далее,

$$\nabla f'=\left[10-2\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right),\ 16-2\left(\frac{15}{2}-\frac{\lambda}{3}\right)\right]=\left(8-\frac{4\lambda}{3},\ 1+\frac{2\lambda}{3}\right).$$

Следовательно, $\frac{d\,\Delta z}{d\lambda}=\nabla f'\bar{e}=\left(8-\frac{4\lambda}{3}\right)\frac{2}{3}+\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=5-\frac{10\lambda}{9}$ и $\frac{d^2\,\Delta z}{d\lambda^2}=-\frac{10}{9}$.

Из уравнения (19′) находим $\lambda^* = \frac{9}{2}$.

4) Величина перемещения λ на II итерации будет равна

$$\lambda = \min\left\{\frac{15}{2},\ \frac{9}{2}\right\} = \frac{9}{2}.$$

5) Новая точка

$$\bar{X}' = \bar{X}^0 + \lambda\bar{e} = \left(1,\ \frac{15}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right) = (4,\ 6).$$

Найденная точка, как видно из рис. 29, совпадает с точкой $\bar{X}^*$, в которой одна из линий уровня (концентрических окружностей) касается границы области, т. е. оказывается оптимальным решением задачи. Точка $\bar{X}^*$, хотя и не является стационарной $[\nabla f^* = (2,\ 4) \neq 0]$, но дальнейшее увеличение функции z в заданной области невозможно. Это можно было бы формально установить при выполнении III итерации. В п. 1 при решении задачи (26) — (30) получили бы $\bar{e} = 0$.

373. Решить градиентным методом следующие задачи математического программирования, начиная итерационный процесс с указанных точек $\bar{X}^0$ и сопровождая в задачах 1) — 9) решение графической иллюстрацией:

$$1)\ z = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2\ (\max),$$
$$\bar{X}^0 = (2,\ 3),$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leqslant 40 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$$

$$2)\ z = 18x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2\ (\max),$$
$$\bar{X}^0 = (2,\ 4),$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_4 \geqslant 0;$$

$$3)\ z = 2x_1^2 + 4x_2^2\ (\max),$$
$$\bar{X}^0 = (5,\ 2),$$
$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 56 \\ 4x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 24 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_4 \geqslant 0;$$

$$4)\ z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2\ (\min),$$
$$\bar{X}^0 = (2,\ 7),$$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 8 \\ 11x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 96 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_4 \geqslant 0;$$

$$5)\ z = x_1^2 + 2x_1 - x_2\ (\min),$$
$$\bar{X}^0 = (2,\ 2),$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad &= 30 \\ x_1 + x_2 \qquad &\leqslant 15 \\ 5x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 60 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_4 \geqslant 0;$$

6) $z=32x_1+24x_2-2x_1^2-4x_2^2$ (max),

$$\bar{X}^0=(3,\ 10),$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x_1+7x_2+x_3+x_4+\ x_5=105 \\ 2x_1+4x_2+x_3\qquad +\ x_5=\ 45 \\ 3x_1+\ x_2\qquad +x_4-2x_5=\ 30 \end{array}\right\},\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0;$$

7) $z=20x_1+18x_2-x_1^2-x_2^2$ (max),

$$\bar{X}^0=(2,\ 3),$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2\leqslant 30 \\ x_1+\ x_2\leqslant 15 \\ 5x_1+2x_2\leqslant 60 \end{array}\right\},\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

8) $z=-4(x_1-5)^2-(x_2-11)^2$ (max),

$$\bar{X}^0=(3,\ 5),$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2\leqslant 30 \\ x_1+\ x_2\leqslant 15 \\ 5x_1+2x_2\leqslant 60 \end{array}\right\},\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

9) $z=2x_1^2+x_2^2-32x_1-6x_2$ (min),

$$\bar{X}^0=(2,\ 6),$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2+x_3\qquad\qquad =30 \\ x_1+\ x_2\qquad +x_4\qquad =15 \\ 5x_1+2x_2\qquad\qquad +x_5=60 \end{array}\right\},\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0.$$

10) $z=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$ (min),

$$\bar{X}^0=(4,\ 2,\ 1)$$

$$x_1+3x_2+x_3\leqslant 15,$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0;$$

11) $z=10-2x_1+x_2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ (max),

$$\bar{X}^0=(0,\ 1,\ 2),$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+\ x_2+3x_3\leqslant 18 \\ x_1+2x_2+\ x_3\leqslant 20 \end{array}\right\},\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0;$$

12) $z=x_1+2x_1^2+2x_2+4x_3$ (min),

$$X_0=(1,\ 2,\ 3).$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3\leqslant 15 \\ 3x_1+\ x_2+\ x_3\leqslant 12 \end{array}\right\},\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0.$$

374. Решить следующие задачи линейного программирования градиентным методом:

1) $$z=2x_1-3x_2 \ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2\leqslant 16 \\ 5x_1+2x_2\leqslant 40 \end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

2) $$z=x_1+2x_2 \ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} x_1+3x_2\leqslant 30 \\ x_1+\ x_2\leqslant 15 \end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

3) $$z=2x_1-x_2 \ (\min),\quad \left.\begin{array}{r} x_1+3x_2\leqslant 30 \\ x_1+\ x_2\leqslant 15 \\ 5x_1+2x_2\leqslant 60 \end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0;$$

4) $$z=x_1-2x_2+x_3 \ (\max),\quad \left.\begin{array}{r} x_1-2x_2+x_3=10 \\ 2x_1+\ x_2-x_3=12 \end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0;$$

5) $$z=x_1+2x_2-x_3-x_4 \ (\min),\quad \left.\begin{array}{r} 2x_1-x_2+\ x_3-3x_4=\ 8 \\ x_1+x_2-2x_3+\ x_4=12 \end{array}\right\},\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0.$$

Примечание 1. Основное преимущество градиентного метода в сравнении с обычным симплексным методом заключается в том, что итерационный процесс можно начать с любого допустимого, а не обязательно с опорного решения.

2. В ранее указанной последовательности вычислений существенное упрощение для линейных задач заключается в том, что $\nabla f = \bar{C}$ и потому определение λ^* в п. 3 не требуется.

§ 4. МЕТОД КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Метод является приближенным и в принципе применим к любой задаче математического программирования, однако практически он более эффективен при решении задач выпуклого программирования с сепарабельной целевой функцией. Этот метод основан на аппроксимации заданной функции кусочно-линейной, благодаря чему нелинейная задача приближенно сводится к линейной задаче.

Функция $f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ называется **сепарабельной**, если ее можно представить в виде суммы n функций, зависящих каждая от одной переменной, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)=f_1(x_1)+\ldots+f_k(x_k)+\ldots+f_n(x_n). \qquad (32)$$

Очевидно, что если функции $f_k(x_k)$ выпуклые (вогнутые), то и функция $f(x_1, \ldots, x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_k)$ — выпуклая (вогнутая).

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ (рис. 30). Разобьем отрезок $s+1$ точками $x^0=a<x^1<\ldots<x^s=b$ на s частей и обо-

значим * $f(x_0)=f^0, f(x')=f', \dots, f(x^s)=f^s$. Тогда кусочно-линейная

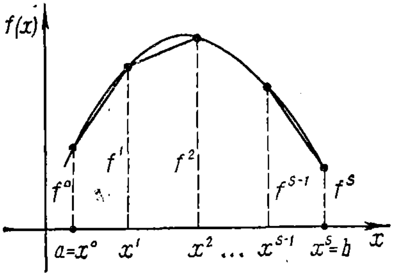

РИС. 30

аппроксимация $\hat{f}(x)$ функции $f(x)$, представленная на рис. 30 ломаной линией, может быть выражена в виде

$$\hat{f}(x)=\sum_{j=0}^{s} \lambda^j f^j, \tag{33}$$

где

$$x=\sum_{j=0}^{s} \lambda^j x^j, \tag{34}$$

$$\sum_{j=0}^{s} \lambda^j = 1, \tag{35}$$

$$\text{все } \lambda^j \geqslant 0, \tag{36}$$

при дополнительном условии: только одно λ^j, или два соседних (λ^{j-1}, λ^j или λ^j, λ^{j+1}) могут быть положительными; это условие можно записать в виде

$$\lambda^j \cdot \lambda^{j_1} = 0, \text{ если } |j-j_1| \neq 1. \tag{37}$$

375. Записать аналитически кусочно-линейную аппроксимацию функции $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ на отрезке $[0,4]$, разбив его на три интервала.

Решение. Выбрав четыре точки $x^0=0$, $x^1=1$, $x^2=3$ и $x^3=4$, вычислим соответствующие значения функции $f(0)=f^0=$ $=0$, $f(1)=f^1=\frac{1}{4}$, $f(3)=f^2=\frac{9}{4}$, $f(4)=f^3=4$. Тогда получим

$$\hat{f}(x)=0\cdot\lambda^0+\frac{1}{4}\lambda^1+\frac{9}{4}\lambda^2+4\lambda^3, \tag{33'}$$

где $\lambda^0+\lambda^1+\lambda^2+\lambda^3=1$, все $\lambda^j \geqslant 0$ и $x=0\cdot\lambda^0+1\cdot\lambda^1+3\lambda^2+$ $+4\lambda^3$.

---

* Здесь и далее в настоящем параграфе в обозначениях x^j, λ^j, f^j числа j обозначают не показатели степеней, а индексы точек подразделения интервалов.

376. По данным предыдущей задачи найти точные и приближенные значения функции в середине интервалов разбиения и в точке $x=\frac{3}{2}$.

Решение. Для определения значений λ по заданному значению x, лежащему в интервале $(j, j+1)$, можно воспользоваться формулой

$$\lambda^j=\frac{x^{j+1}-x}{x^{j+1}-x^j}. \qquad (38)$$

Для середины 1-го интервала имеем

$$x^j=x^0=0, \quad x^{j+1}=x^1=1, \quad x=0{,}5, \quad \lambda^j=\lambda^0=\frac{1-0{,}5}{1-0}=0{,}5 \text{ и}$$

$$\lambda^{j+1}=\lambda^1=1-\lambda^0=0{,}5. \text{ Остальные } \lambda^j=0.$$

По найденным значениям λ^j из формулы (33) получаем соответствующее приближенное значение функции

$$\hat{f}(0{,}5)=0\cdot 0{,}5+\frac{1}{4}\cdot 0{,}5=\frac{1}{8}.$$

Аналогично вычисляются значения λ^j и $\hat{f}(x)$ для других заданных точек. Результаты расчетов приведены в следующей таблице:

x	0,5		2		3,5		1,5	
Интервалы	(0, 1)		(1, 3)		(3, 4)		(1, 3)	
j	0	1	1	2	2	3	1	2
λ^j	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,25
$\hat{f}(x)$	0,125		1,250		3,125		0,750	
$f(x)$	0,062		1,000		3,062		0,562	

377. Выполнить кусочно-линейную аппроксимацию следующих функций, используя разбиение отрезка на три равных интервала:

1) $z=x^3$ на отрезке $[0, 3]$;
2) $z=x^2-2y^2$, где $0\leqslant x\leqslant 4$, $1\leqslant y\leqslant 3$;
3) $z=2x+y^2$, где $0\leqslant x\leqslant 5$, $0\leqslant y\leqslant 2$;
4) $z=xy$, где $1\leqslant x\leqslant 2$, $1\leqslant y\leqslant 3$.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования, целевая функция которой представлена в форме (32): максимизировать

$$z=\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \qquad (39)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{40}$$

$$x_k \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{41}$$

Используя кусочно-линейную аппроксимацию (33) для каждого из слагаемых выражений (39) и подставляя в равенство (40) значение $x_k = \sum_{j=0}^{s_k} \lambda_k^j x_k^j$ из формулы (34), получим окончательно следующую модель приближенной задачи линейного программирования: максимизировать

$$z = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{s_k} \lambda_k^j f_k^j \right) \tag{42}$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{s_k} \lambda_k^j x_k^j \right) = a_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{43}$$

$$\sum_{j=0}^{s_k} \lambda_k^j = 1 \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{44}$$

$$\lambda_k^j \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, s_k). \tag{45}$$

Условие (37) в случае, когда все $f_k(x_k)$ выпуклые функции, будет выполняться автоматически и может не учитываться в ходе решения. Поэтому задачу (42) — (45) можно решать обычным симплексным методом. Однако если целевая функция не выпуклая, то это условие накладывает дополнительные ограничения на базис, которые необходимо учитывать при использовании, например, алгоритма симплексного метода.

Решение приближенной задачи для выпуклой функции (39) дает приближение к глобальному экстремуму исходной задачи.

Для оценки степени близости приближенного решения к точному можно провести дополнительное дробление на более мелкие интервалы в районе достигнутого приближенного решения.

Если при этом будут достигаться достаточно близкие решения, то новое решение можно принять как приближенное решение исходной задачи.

378. Минимизировать $z = \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - 2)^2$ при условиях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leqslant 16 \\ 3x_1 + x_2 &\leqslant 15 \end{aligned}\right\}, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Графическое решение задачи показано на рис. 31. Область допустимых решений есть выпуклый четырехугольник $OBCD$. Линии уровня — эллипсы с центром в точке A (3; 2). В этой точке и достигается глобальный минимум $z_{\min} = 0$.

Теперь рассмотрим решение этой же задачи с помощью кусочно-линейной аппроксимации.

Прежде всего запишем данную задачу в форме (39) — (41): максимизировать $z_1 = -z = -(x_1 - 3)^2 - 2(x_2 - 2)^2$ при условиях

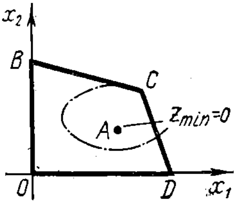

РИС. 31

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 15 \end{aligned}\right\}, \quad \begin{aligned} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Имеем в данном случае $f_1(x_1) = -(x_1 - 3)^2$ и $f_2(x_2) = -2(x_2 - 2)^2$. Из графического анализа задачи (рис. 31) видно, что достаточно рассматривать x_1 в интервале (0, 5) и x_2 в интервале (0, 4) (рис. 32 и 33). Разбив первый интервал на 5 частей точками $x_1^0 = 0$, $x_1^1 = 1$, $x_1^2 = 2$, $x_1^3 = 3$, $x_1^4 = 4$, $x_1^5 = 5$ и второй на 4 части точками $x_2^0 = 0$, $x_2^1 = 1$, $x_2^2 = 2$, $x_2^3 = 3$ и $x_2^4 = 4$, введем соответственно 6 переменных λ_1^j $(j = 0, 1, \ldots, 5)$ и 5 переменных λ_2^j $(j = 0, 1, \ldots, 4)$.

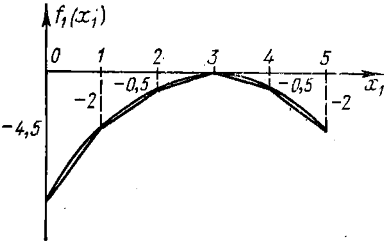

РИС. 32

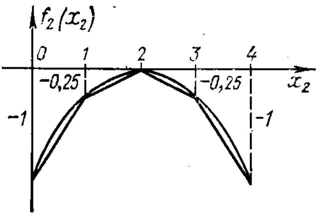

РИС. 33

Значения функций $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ в указанных точках приведены в таблице.

x_1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x_1)$	—4,5	—2	—0,5	0	—0,5	—2
x_2	0	1	2	3	4	
$f_2(x_2)$	—1	—0,25	0	—0,25	—1	

В соответствии с формулами (33) и (34) имеем

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}_1(x_1) &= 4{,}5\lambda_1^0 - 2\lambda_1^1 - 0{,}5\lambda_1^2 - 0 \cdot \lambda_1^3 - 0{,}5\lambda_1^4 - 2\lambda_1^5 \\ \hat{f}_2(x_2) &= -1 \cdot \lambda_2^0 - 0{,}25\lambda_2^1 - 0 \cdot \lambda_2^2 - 0{,}25\lambda_2^3 - 1 \cdot \lambda_2^4 \end{aligned}\right\}, \qquad (33')$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \cdot \lambda_1^0 + 1 \cdot \lambda_1^1 + 2\lambda_1^2 + 3\lambda_1^3 + 4\lambda_1^4 + 5\lambda_1^5 \\ x_2 &= 0 \cdot \lambda_2^0 + 1 \cdot \lambda_2^1 + 2\lambda_2^2 + 3\lambda_2^3 + 4\lambda_2^4 \end{aligned}\right\}. \qquad (34')$$

Подставляя найденные выражения для $f(x_1)$, $f_2(x_2)$, x_1 и x_2 в исходную модель задачи и умножая выражение для целевой функции на 4, приведем ее к следующему виду:

$$4\hat{z}_1 = -18\lambda_1^0 - 8\lambda_1^1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1^4 - 8\lambda_1^5 - 4\lambda_2^0 - \lambda_2^1 - \lambda_2^3 - 4\lambda_2^4 \ (\max), \qquad (42')$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^1 + 2\lambda_1^2 + 3\lambda_1^3 + 4\lambda_1^4 + 5\lambda_1^5 + 4\lambda_2^1 + 8\lambda_2^2 + 12\lambda_2^3 + 16\lambda_2^4 + \underline{\underline{x_3}} = 16 \\ 3\lambda_1^1 + 6\lambda_1^2 + 9\lambda_1^3 + 12\lambda_1^4 + 15\lambda_1^5 + \lambda_2^1 + 2\lambda_2^2 + 3\lambda_2^3 + 4\lambda_2^4 + \underline{\underline{x_4}} = 15 \end{array}\right\}, \qquad (43')$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\lambda_1^0} + \lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 + \lambda_1^5 = 1 \\ \underline{\lambda_2^0} + \lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 = 1 \end{array}\right\}, \qquad (44')$$

$$\lambda_1^j \geqslant 0 \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ 5) \quad \text{и} \quad \lambda_2^j \geqslant 0 \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ 4). \qquad (45')$$

В полученной задаче первые два уравнения решены относительно базисных переменных x_3 и x_4, вторые два — относительно переменных λ_1^0 и λ_2^0. Поэтому можем непосредственно перейти к решению задачи в симплексной таблице (стр. 250).

После II итерации получили оптимальное решение приближенной задачи $x_3 = 5$, $x_4 = 4$, $\lambda_1^3 = 1$, $\lambda_2^3 = 1$ и остальные $\lambda_k^j = 0$. Этому решению соответствует $\hat{z}_{\min} = 0$, откуда $z_{\max} = 0$.

По найденным значениям λ_k^j, используя соотношения (34'), находим $x_1^* = 3$ и $x_2^* = 2$.

В данном случае приближенное решение оказалось случайно совпадающим с точным решением.

Заметим, что если бы мы в окрестности найденного решения раздробили интервалы по x_1 от 2 до 4 и по x_2 от 1 до 3 на более мелкие части и при этом точки раздробления не совпали бы с найденными $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$, то вместо улучшения получили бы менее точное решение.

379. С помощью кусочно-линейной аппроксимации решить следующую задачу математического программирования: минимизировать $z = 4x_1x_2$ при условиях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 24 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leqslant 16 \end{array}\right\}, x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Заданная функция не является выпуклой, поэтому необходимо будет в дальнейшем учитывать условия (38) при выборе базиса. Кроме того функция не сепарабельная. Введем новые переменные y_1 и y_2 из соотношений

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad y_2 = x_1 - x_2, \quad \text{откуда} \ x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

Очевидно, что $z = 4x_1x_2$ будет уже сепарабельной функцией.

Переходя к переменным y_1 и y_2, вводя балансовые переменные x_3 и x_4 и заменяя z на $z_1 = -z$, придем окончательно к задаче следующего вида: максимизировать $z_1 = -y_1^2 + y_2^2$ при условиях

$$\left.\begin{array}{l} 5y_1 - y_2 \leqslant 48 \\ 3y_1 + y_2 \leqslant 32 \\ 2x_1 = y_1 + y_2 \geqslant 0 \\ 2x_2 = y_1 - y_2 \geqslant 0 \end{array}\right\}. \qquad (*)$$

	Баз. перем.		—18	—8	—2		—2	—8	—4	—1		—1	—4			$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	λ_1^0	λ_1^1	λ_1^2	λ_1^3	λ_1^4	λ_1^5	λ_2^0	λ_2^1	λ_2^2	λ_2^3	λ_2^4	x_3	x_4	
	x_3	16		1	2	3	4	5		4	8	12	16	1		16/3
	x_4	15		3	6	9	12	15		1	2	3	4		1	15/9
—18	λ_1^0	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1								1
—4	λ_2^0	1							1	1	1	1	1			
	$4\hat{z}_1$	—22	·	—10	—16	—18	—16	—10	·	—3	—4	—3				
	x_3	13	—3	—2	—1	·	1	2	·	4	8	12	16	1	·	13/9
	x_4	6	—9	—6	—3	·	3	6	·	1	2	3	4	·	1	3
	λ_1^3	1	1	1	1	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	
	λ_2^0	1	·	·	·	·	·	·	1	1	$\boxed{1}$	1	1	·	·	1
	$4\hat{z}_1$	—4	18	8	2	·	2	8	·	—3	—4	—3	—	—	—	
	x_3	5	—3	—2	—1	·	1	2	—8	—4	·	4	8	1	·	
	x_4	4	—9	—6	—3	·	3	6	—2	—1	·	1	2	·	1	
	λ_1^3	1	1	1	1	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	
	λ_2^2	1	·	·	·	·	·	·	1	1	1	1	1	·	·	
	$4\hat{z}_1$	0	18	8	2	·	2	8	4	1	·	1	4	·	·	

Для аппроксимации функций $f(y_1) = -y_1^2$ и $f_2(y_2) = y_2^2$ необходимо определить промежутки изменения переменных y_1 и y_2. Так как для x_1 и x_2 имеем $0 \leqslant x_1 \leqslant 8$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant 8$, то соответствующие области для y_1 и y_2 будут $0 \leqslant y_1 \leqslant 16$ и $-8 \leqslant y_2 \leqslant 8$. Разобьем каждый из этих промежутков на 4 интервала точками $y_1^0 = 0$, $y_1^1 = 4$, $y_1^2 = 8$, $y_1^3 = 12$, $y_1^4 = 16$ и $y_2^0 = -8$, $y_2^1 = -4$, $y_2^2 = 0$, $y_2^3 = 4$, $y_2^4 = 8$.

Соответствующие значения функции $f_1(y) = -y_1^2$ и $f_2(y_2) = y_2^2$ приведены в следующей таблице:

y_1	0	4	8	12	16
$f_1(y_1)$	0	−16	−64	−144	−256
y_2	−8	−4	0	4	8
$f_2(y_2)$	64	16	0	16	64

В соответствии с формулой (33) имеем

$$\left.\begin{aligned} f_1(y_1) &= 0 \cdot \lambda_1^0 - 16\lambda_1^1 - 64\lambda_1^2 - 144\lambda_1^3 - 256\lambda_1^4, \\ f_2(y_2) &= 64\lambda_2^0 + 16\lambda_2^1 + 0\lambda_2^2 + 16\lambda_2^3 + 64\lambda_2^4 \end{aligned}\right\}. \tag{33'}$$

Далее, из формул (34) получаем

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0 \cdot \lambda_1^0 + 4\lambda_1^1 + 8\lambda_1^2 + 12\lambda_1^3 + 16\lambda_1^4 \\ y_2 &= -8\lambda_2^0 - 4\lambda_2^1 + 0 \cdot \lambda_2^2 + 4\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 \end{aligned}\right\}. \tag{34'}$$

Подставляя найденные выражения для $f_1(y_1)$, $f_2(y_2)$, y_1, y_2 в задачу (*), умножая последние два неравенства на -1 и вводя балансовые переменные x_3, x_4, x_5 и x_6, получим окончательно следующую линейную модель:

$$\hat{z}_1 = -16\lambda'_1 - 64\lambda_1^2 - 144\lambda_1^3 - 256\lambda_1^4 + 64\lambda_2^0 + 16\lambda_2^1 + 16\lambda_2^3 + 64\lambda_2^4 \ (\max) \tag{42'}$$

$$\left.\begin{aligned} 20\lambda_1^1 + 40\lambda_1^2 + 60\lambda_1^3 + 80\lambda_1^4 + 8\lambda_2^0 + 4\lambda_2^1 - 4\lambda_2^3 - 8\lambda_2^4 + \underline{x_3} &= 48 \\ 12\lambda_1^1 + 24\lambda_1^2 + 36\lambda_1^3 + 48\lambda_1^4 - 8\lambda_2^0 - 4\lambda_2^1 + 4\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 + \underline{x_4} &= 34 \end{aligned}\right\}, \tag{43'}$$

$$\left.\begin{aligned} -4\lambda_1^1 - 8\lambda_1^2 - 12\lambda_1^3 - 16\lambda_1^4 + 8\lambda_2^0 + 4\lambda_2^1 - 4\lambda_2^3 - 8\lambda_2^4 + x_5 &= 0 \\ -4\lambda_1^1 - 8\lambda_1^2 - 12\lambda_1^3 - 16\lambda_1^4 - 8\lambda_2^0 - 4\lambda_2^1 + 4\lambda_2^3 + 8\lambda_2^4 + \underline{x_6} &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\lambda_1^0} + \lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 + \lambda_1^4 &= 1 \\ \lambda_2^0 + \lambda_2^1 + \underline{\lambda_2^2} + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{44'}$$

Исходный базис включает x_3, x_4, x_5, x_6, λ_1^0 и λ_2^2.

Дальнейшие расчеты проводим в симплексных таблицах. При этом условия (37) заставляют выбирать разрешающий столбец не только по отрицательной оценке, но и по тому, какую переменную можно вводить в базис.

	Баз. перем.			−16	−64	−144	−256	64	16		16	64					$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
		a_{i0}	λ_1^0	λ_1^1	λ_1^2	λ_1^3	λ_1^4	λ_2^0	λ_2^1	λ_2^2	λ_2^3	λ_2^4	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_3	48	·	20	40	60	80	8	4	·	−4	−8	1	·	·	·	6
	x_4	32	·	12	24	36	48	−8	−4	·	4	8	·	1	·	·	·
	x_5	0	·	−4	−8	−12	−16	8	4	·	−4	−8	·	·	1	·	0
	x_6	0	·	−4	−8	−12	−16	−8	−4	·	4	8	·	·	·	1	0
	λ_1^0	1	1	1	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
	λ_2^2	1	·	·	·	·	·	1	1	1	1	1	·	·	·	·	1
	$\hat{z}_1$	0	·	16	64	144	256	−64	−16	·	−16	−64					
	x_3	48	·	16	32	48	64	·	·	·	·	·	1	·	·	1	
	x_4	32	·	16	32	48	64	·	·	·	·	·	·	1	·	−1	
	x_5	0	·	−8	−16	−24	−32	·	·	·	·	·	·	·	1	1	
16	λ_2^3	0	·	−1	−2	−3	−4	−2	−1	·	1	2	·	·	·	1/4	
	λ_1^0	1	1	1	1	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
	λ_2^2	1	·	1	2	3	4	3	2	1	·	−1	·	·	·	−1/4	
	$\hat{z}_1$	0	·	·	32	96	192	−96	−32	·	·	−32	·	·	·	4	

После I итерации дальнейшее улучшение решения без нарушения условий (37) невозможно. Действительно, выбирая, например, за разрешающий столбец при λ_2^0, мы вынуждены были бы ввести в базис λ_2^0 вместо λ_2^3. Тогда в базисе одновременно оказались бы λ_2^3 и λ_2^0, что противоречит условию (37). Аналогичная ситуация сложилась бы при введении в базис λ_2^1 (с оценкой —32) или λ_2^4 (с оценкой —32).

Такое положение, которое часто возникает при решении задач невыпуклого программирования, свидетельствует о достижении локального максимума приближенной задачи.

Итак, получили $\lambda_1^0 = \lambda_2^3 = 1$, все остальные $\lambda_k^j = 0$ и $\hat{z}_{\max} = 0$. Из соотношений (34) находим $y_1^* = 0$ и $y_2^* = 0$, откуда $x_1^* = x_2^* = 0$ и $\hat{z}_{\min} = -\hat{z}_{1\max} = 0$.

Геометрический анализ задачи подтверждает, что найденное решение является точкой глобального минимума исходной задачи.

380. Решить следующие задачи выпуклого программирования, используя метод кусочно-линейной аппроксимации.

1) $z = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2$ (max),
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\leqslant 80 \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 34 \end{aligned}\right\},\quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$$

2) $z = x_1 + 2x_2 + x_2^2$ (min),
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 34 \end{aligned}\right\},\quad x_1 \geqslant 0, \ldots,\ x_4 \geqslant 0;$$

3) $z = x_1^2 + 2x_2^2$ (min),
$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ 7x_1 + 10x_2 &\geqslant 84 \\ 5x_1 + x_2 &\leqslant 60 \end{aligned}\right\},\quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$$

4) $z = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2$ (max),
$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 7x_1 + 10x_2 - x_4 &= 84 \\ 5x_1 + x_2 + x_5 &= 60 \end{aligned}\right\},\quad x_1 \geqslant 0, \ldots, x_5 \geqslant 0;$$

5) $z = 2(x_1 - 1)^2 + 9(x_2 - 3)^2$ (min),
$x_1 + x_2 \leqslant 2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$

6) $z = 4 - (x_1 - 3)^2 - 2(x_2 - 4)^2$ (max),
$x_1 + x_2 \leqslant 3,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

381. В области решений системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leqslant 60 \\ 8x_1 + 5x_2 &\leqslant 120 \end{aligned}\right\},\quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

найти экстремумы следующих функций:

$$1)\ z = x_1 + f(x_2),$$

где

$$f(x_2) = \begin{cases} 0{,}6x_2 - 0{,}6, & \text{если } 1 \leqslant x_2 \leqslant 6; \\ 1{,}5x_2 - 6, & \text{если } x_2 \geqslant 6; \end{cases}$$

$$2)\ z = f(x_1) + 3x_2,$$

где

$$f(x_1) = \begin{cases} 0{,}4x_1, & \text{если } 0 \leqslant x_1 \leqslant 5; \\ -3, & \text{если } 5 < x \leqslant 9; \\ 3{,}5x_1 - 25{,}5, & \text{если } x_1 > 9\,; \end{cases}$$

$$3)\ z = 15 - |x_1 - 5|; \qquad 4)\ z = |x_1 - 2| + |x_2 - 5|;$$

$$5)\ z = 2x_1 - x_2 + 3\delta,$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0; \\ 1, & \text{если } x_1 > 0; \end{cases}$$

$$6)\ z = 2x_1 + x_2 + 3\delta_1 + 2\delta_2,$$

где

$$\delta_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0; \\ 1, & \text{если } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 = 0; \\ 1, & \text{если } x_2 > 0. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

4. 1) $x_2=20-2x_1-x_4$, $x_3=-45+5x_1+5x_4$; 2) $x_1=44-77x_3$, $x_2=-24+40x_3$, $x_4=-14+30x_3$; 3) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=-16/3$, $x_4=6$; 5) $x_1=1$, $x_2=x_3=$ $=x_4=0$, $x_5=1$; 6) $x_1=8-9x_2$, $x_3=0$, $x_4=-10+11x_2$; 7) несовм; 8) несовм; 9) $x_1=0$, $x_2=-13-13x_4$, $x_3=-7-9x_4$; 10) несовм.

8. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 30 & 0 & -5 \\ -35 & 0 & 10 \\ -18 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 5) не существ.; 6) не существ.; 7) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & -8 & 10 & -2 \\ 23 & -20 & 4 & -5 \\ -1 & 10 & -2 & -1 \\ -8 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$; 9) не существ.; 10) не существ.; 11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; **10.** 1) 160; 2) —12; 3) —23; 4) —252; 5) 120; 6) 100. **14.** 1) (2, 3, 0, 0); (0, 15, —4, 0), (0, 11, 0, —4), (11/4, 0, 0, 3/2), (5/2, 0, 1, 0), (0, 0, 11, —15); 2) (0, 4, 0, 2), (2, —2, 0, 0), (0, —2, —2/3, 0), (4/3, 0, 0, 2/3), (0, 0, —4/9, 2/3), $(3\bar{a}_1+\bar{a}_3=0)$; 3) (1, 0, —2, 0, 4), (1, 0, —10, 4, 0), (9, —4, —14, 0, 0), (—19, 10, 0, 14, 0), (1, 0, 0, —1, 5), (—1/3, 2/3, 0, 0, 14/3), (0, 1/2, —1/2, 0, 9/2), (0, 1/2, 0, —1/4, 19/4), (0, 1/2, —19/2, 9/2, 0), $(2\bar{a}_3+\bar{a}_4-\bar{a}_5=0)$; 4) (0, 4, 0, 6, —2), (0, 2, —2, 12, 0), (0, 0, —4, 18, 2), (0, 6, 2, 0, —4), (9, 0, — 4, 0, —25), (2/3, 0, —4, 50/3, 0), (—12/7, 50/7, 22/7, 0, 0), (—2/3, 4, 0, 22/3, 0), (3, 4, 0, 0, —11), $(\bar{a}_1-2\bar{a}_4-$ $-3\bar{a}_5=0)$. **17.** 1) (0, 0, 9, 31, 21), (7, 0, 23, 17, 0), (8, 3, 16, 0, 0), (3, 5, 0, 0, 17), (0, 3, 0, 16, 24); 2) (0, 0, 2, 36, 5), (0, 2, 0, 26, 3), (1, 4, 0, 13, 0), (5, 0, 12, 21, 0); 3) (4, 12, 0, 0), (0, 10, 0, 2), (0, 0, 4, 4), (10, 0, 6, 0); 4) (0, 12, 0, 12), (0, 0, 3, 9), (4, 0, 4, 0), (6, 18, 0, 0); 5) (0, 0, 6, 33, 6, 3), (0, 6, 0, 21, 12, 27), (7, 6, 0, 0, 5, 20), (9, 3, 3, 0, 0, 6), (7, 1, 5, 10, 0, 0), (3, 0, 6, 24, 3, 0); 6) (3, 21, 21, 3, 0, 0), (0, 9, 24, 6, 0, 3), (0, 0, 15, 6, 3, 6), (3, 0, 0, 3, 7, 7), (6, 15, 0, 0, 6, 3), (6, 24, 9, 0, 3, 0).

ГЛАВА II

23. $\bar{X}A=(102,\ 204,\ 81,\ 144,\ 116)$; $A\bar{C}'=\begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix}$, $\bar{X}AC'=3607$.

24. $AC_1' = \begin{pmatrix} 184 & 104 \\ 161 & 103 \\ 160 & 102 \end{pmatrix}$, $\bar{X}AC_1' = (3607,\ 2161)$, $\bar{X}AC_1'\bar{e} = 5768$.

27. $\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 52 & 21 & 22 \\ 56 & 78 & 36 \\ 12 & 11 & 42 \end{pmatrix}$. **28.** $\frac{1}{184}\begin{pmatrix} 275 & 50 & 60 \\ 310 & 390 & 100 \\ 180 & 200 & 240 \end{pmatrix}$. **29.** (171, 5; 123; 74).

30. $\begin{pmatrix} 0{,}40 & 1{,}41 & 0{,}11 \\ 0{,}22 & 0{,}45 & 1{,}07 \\ 1{,}87 & 0{,}07 & 0{,}44 \end{pmatrix}$. **31.** $\begin{pmatrix} 46 \\ 6 \end{pmatrix}$. **32.** $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. **34.** $\begin{pmatrix} 21\,300 \\ 80\,135 \\ 50\,230 \end{pmatrix}$; 112.

37. $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}07 \\ 0{,}58 & 2{,}97 & 0{,}94 \\ 1{,}20 & 1{,}71 & 3{,}42 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 55{,}1 \\ 54{,}7 \end{pmatrix}$. **38.** $\begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}19 & 0{,}04 \\ 0{,}51 & 1{,}50 & 0{,}56 \\ 0{,}50 & 0{,}07 & 3{,}26 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6{,}7 \\ 30{,}4 \\ 22{,}3 \end{pmatrix}$. **39.** 1) $\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}08 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1{,}175 & 0{,}250 & 0{,}140 \\ 0{,}228 & 1{,}240 & 0{,}400 \\ 0{,}101 & 0{,}220 & 1{,}160 \end{pmatrix}$:

3) $\begin{pmatrix} 190{,}5 \\ 168{,}0 \\ 212{,}0 \end{pmatrix}$; 4) $\bar{t} = (0{,}125;\ 0{,}3015;\ 0{,}15)$, $\bar{T} = (0{,}233;\ 0{,}450;\ 0{,}316)$, $\bar{Q} = (30{,}3;\ 27;\ 50{,}5)$; 5) $\bar{f} = (1;\ 1{,}875;\ 2)$, $\bar{F} = (1{,}81;\ 3{,}02;\ 3{,}21)$, $\bar{\Phi} = (235;\ 181;\ 515)$; 6) (2,33; 4,50; 3,16). **40.** $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}6 & 1{,}0 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}775 & 1{,}05 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0{,}155 & 0{,}182 & 0{,}228 \\ 1{,}014 & 1{,}566 & 1{,}412 \\ 0{,}635 & 1{,}265 & 1{,}572 \end{pmatrix}$. **42.** $\begin{pmatrix} 0{,}021 & 0{,}042 \\ 0{,}021 & 0{,}042 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА III

63. 1) (0,2); 2) (20/19, 45/19); 3) (2/3, 2/3); 4) (0,3); 5) (8/5, 3/5;; 6) (10/3, 10/3); 7) (0, 2, 1, 0); 8) (10/3, 7/3, 5/3, 0, 0); 9) (5, 6, 5, 0, 0, 13); 10) (1, 2, 0, 3, 14, 0); 11) (4, 1, 7, 0, 0); 12) (3, 6, 0, 0, 3, 7). **64.** 1) $-\infty < \lambda \leqslant -2/3$, $\bar{X} = (5{,}0)$; $-2/3 \leqslant \lambda \leqslant 4$, $\bar{X} = (6{,}3)$; $4 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, $\bar{X} = (2{,}5)$; бесчисл. множ. решений при $\lambda = -2/3$ и $\lambda = 4$; 2) $-\infty < \lambda \leqslant -1/8$, $\bar{X} = (6;\ 4{,}5)$; $-1/8 \leqslant \lambda \leqslant 3$, $\bar{X} = (7,\ 3)$; $3 \leqslant \lambda < \infty$, $X = (4,\ 0)$; бесчисл. множ. решений при $\lambda = -1/8$ и $\lambda = 3$; 3) $-\infty < \lambda \leqslant 0$, $\bar{X} = (0,\ 0)$; $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\bar{X} = (0,\ 2)$; $1 \leqslant \lambda < \infty$, решения нет ($z \to \infty$); бесчисл. множ. решений при $\lambda = 1$. **66.** 1) Разрешима при $-1 < \lambda < \infty$ и неразрешима при $-\infty < \lambda \leqslant -1$; 2) разрешима при $-1/4 \leqslant \lambda < 1/3$ и неразрешима при $1/3 \leqslant \lambda < \infty$ ($z \to \infty$) и при $-\infty < \lambda < -1/4$ (область пустая); 3) разрешима при $1/2 < \lambda < 2$ и неразрешима при $\lambda < 1/2$ и $\lambda > 2$. **72.** 1) $\bar{X}_1 = 21/49\ (5,\ 8) + 19/49 \times (9{,}5) + 9/49\ (2,\ -2)$; 2) $\bar{X}_1 = 1/4\ (2,\ 4) + 1/2\ (8,\ 7) + 1/4\ (6,\ 2)$; 3) $\bar{X}_1 = 14/70\ (2,\ 2) + 27/70\ (7,\ 14) + 33/70\ (7,\ 0)$; 4) неограниченная; 5) неограниченная; 6) $\bar{X}_1$ вне области. **74.** $2(x_1-2)+5x_3+(x_4-5)=0$, $2x_1+5(x_3-1)+x_4-2=0$, $2(x_1-3)+5(x_3-2)+x_4=0$. **75.** 1) (0; 0; 3; 0; 2), (1,5; 0; 0; 0; 3,5), (1,5; 1,75; 0; 0; 0), область неограниченная; 2) $\bar{X}=t(8,5;\ 1,5;\ 0)+(1-t),(0;\ 12,83)$; 3) $\bar{X}=t_1(0,\ 0,\ 9,\ 20)+t_2(4,\ 0,\ 13,\ 0)+t_3(2,47;\ 3,82;\ 0;\ 0)+t_4(0,\ 3,\ 0,\ 14)$, где $t_1+t_2+t_3+t_4=1$ и $t_i\geqslant 0$; 4) $\bar{X}=t(1;\ 1,5;\ 0)+(1-t)(0;\ 1,875;\ 0,25)$. **77.** Ниже приведены: дополнительное ограничение и угловые точки новой области. 1) $x_1+x_2+x_5=M$, $(0,\ 0,\ 2,\ 14,\ M)$, $(0,\ M,\ 2+2M,\ 14+7M,\ 0)$, $((14+7M)/9,\ (2M-14)/9,\ (4M-10)/9,\ 0,\ 0)$, $(7,\ 0,\ 2,\ 0,\ M-7)$; 2) $x_3+x_4+x_5+x_6=M$, $(6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ M)$,$(6+2M,\ M,\ 0,\ M,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 12,\ 6,\ 0,\ 0,\ M-6)$, $(0,\ 12,\ 0,\ 0,\ 6,\ M-6)$, $(0,\ (6+5M)/3,\ (6+2M)/3,\ (M-6)/3,\ 0,\ 0)$, $(0,\ (6+5M)/3,\ 0,\ (M-6)/3,\ (6+2M)/3,\ 0)$; 3) $x_2+x_3+x_4+x_6=M$, $(5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8,\ M)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 8,\ M-5)$, $(5+M,\ M,\ 0,\ 0,\ (24+2M)/3,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 5/2,\ 0,\ 43/3,\ (2M-5)/2)$, $(0,\ (2M-5)/3,\ (5+M)/3,\ 0,\ (9+M)/3,\ 0)$, $(0,\ (M-5)/2,\ 0,\ (5+M)/2,\ (19+M)/3,\ 0)$; 4) $x_1+x_2+x_6=M$, $(37/14,\ 18/7,\ 0,\ 0,\ 11/2,\ (M-73)/14)$, $(M+8)/5,\ (4M-8)/5,\ 0,\ (14M-73)/5,\ (7M-9)/5,\ 0)$, $(2M+3)/3,\ (M-3)/3,\ (7M-9)/3,\ (7M-42)/3,\ 0,\ 0)$, $(5,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ M-6)$. 78. 1) $(3/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7/2)$, $z_{\max}=12$; 2) $(0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 4)$, $z_{\min}=4$; 3) $(2,\ 4,\ 0,\ 8,\ 0)$, $z_{\max}=26$; 4) $(41/4,\ 3/4,\ 0,\ 0,\ 0)$, $z_{\max}=35/4$.

ГЛАВА IV

80. 1) $(0,\ 0,\ 124,\ 140,\ 0,\ 0,\ 0,\ 12,\ 5,\ 58)$, $z_{\max}=154$; 2) $\Delta z_{\max}=-15$; 3) $z'=-2x_7-3x_8+2x_9+3x_{10}-30$; 4) нет; 5) нет. **81.** 2) $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $z_{\min}=3$. 82. $(0,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ 1/2)$, $z_{\max}=-5$. **83.** $(6,\ 9,\ 0,\ 4,\ 0)$, $z_{\max}=33$. **85.** $(0,375;\ 2,06;\ 28,4;\ 0)$, $z_{\max}=x_3=75$. **86.** $7/12\,x_1+x_4-5/9x_5=7/12$, $-5/4x_1+x_2=3/4$, $-7/6\,x_1+x_3+4/9\,x_5=17/9$. 87. 1) $-1/12\,x_3+x_4-3/4\,x_5=85/12$, $x_2+1/2x_3=2/3$, $x_1+5/12\,x_3-1/4\,x_5=55/12$; 2) $x_1/3+x_2=1$, $-3x_1-x_2+x_4=3$. **88.** 1) $(0,6;\ 1,6)$, $z_{\max}=3,8$; $z_{\max}\to\infty$; 3) $(1,5;\ 2,5)$, $z_{\max}=13,5$; 4) $(1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$, $z_{\max}=8$; 5) $(5,\ 0,\ 10,\ 0,\ 1,\ 0)$, $z_{\min}=15$; 6) $(0;\ 1,\ 5;\ 0,625;\ 0;\ 1,5)$, $z_{\min}=-2,375$; 7) $(1,\ 1,\ 3,\ 0)$, $z_{\min}=7$; 8) $z_{\max}\to\infty$; 9) $(3,\ 0,\ 1,\ 3)$, $z_{\min}=2$; 10) $(0,\ 0,\ 12,\ 5,\ 58)$; $z_{\max}=148$; 11) система несовместна; 12) $z_{\max}\to\infty$; 13) $(0,\ 2,\ 8,\ 1,\ 0,\ 1/2)$, $z_{\min}=-3$.

ГЛАВА V

94. 1) $z_{\min}=9$; 2) $z_{\min}=-1$; 3) неразр.; 4) $z_{\min}=46/3$; 5) неразр.; 6) $z_{\min}=22$. **95.** 1) $\bar{X}^*=(3,\ 3)$, $\bar{Y}^*=(1/2,\ 1/2)$, $z_{\max}=T_{\min}=6$; 2) $z_{\max}\to\infty$; 3) $\bar{X}^*=(1,\ 2)$, $\bar{Y}^*=(7/8,\ 5/8)$, $z_{\min}=T_{\max}=4$; 4) $\bar{X}^*=(10,\ 7,\ 0,\ 0)$, $\bar{Y}^*=(4,\ 7)$, $z_{\max}=T_{\min}=37$; 5) $\bar{X}^*=(4,\ 4,\ 0,\ 0)$, $\bar{Y}^*=(4/7,\ 9/7)$, $z_{\max}=T_{\min}=8$; 6) $\bar{X}^*=(1,\ 0)$, $\bar{Y}^*=(1,0)$, $z_{\max}=T_{\min}=1$. **96.** РР, НП, ПН, ПП. **100.** $\bar{X}^*=(0,\ 1,\ 0)$; 2) $\bar{X}^*=(0,\ 4/7,\ 1/7,\ 0)$; 4) $\bar{X}^*=(0,\ 0,\ 2/3,\ 0)$; 6) $\bar{X}^*=(9/43,\ 4/43,\ 0)$.

102. 1) $\overline{Y}^*=(0,\ 5/2,\ 1/2)$, $T_{\min}=30$; 2) область пустая; 3) $\overline{Y}^*=(0,\ 1/3,\ 2/3)$, $T_{\min}=4$; 4) $\overline{Y}^*=(3,\ 4,\ 1)$, $T_{\min}=1$; 5) $T\to-\infty$; 6) $\overline{Y}^*=(1/5,\ 8/5)$, $T_{\max}=34/5$; 7) область пустая; 8) $\overline{Y}^*=(5/19,\ 0,\ 2/19)$, $T_{\min}=-126/19$. **103.** 1) $\overline{X}^*=(4{,}55;\ 9{,}22;\ 0{,}92)$, $z_{\min}=17{,}9$; 2) $\overline{X}^*=(6,\ 0,\ 0,\ 0)$, $z_{\min}=6$; 3) $\overline{X}^*=(12,\ 0)$, $z_{\min}=12$; 4) $\overline{X}^*=(0,\ 9,\ 15)$, $z_{\max}=24$; 5) $\overline{X}^*=(4{,}5;\ 0;\ 0;\ 12;\ 1{,}25;\ 0)$, $z_{\max}=2{,}5$; 6) $\overline{X}^*=(0,\ 31,\ 7,\ 0,\ 18)$, $z_{\max}=38$; 7) $\overline{X}^*=(0;\ 0{,}4;\ 3{,}2;\ 2{,}8)$, $z_{\max}=0$; **106.** 1) да; 2) да; 3) нет; 4) да. **107.** $-4/3\leqslant\Delta a_{01}\leqslant 2$. **108.** 1) $\Delta\overline{a}_0=(-1{,}2;\ 0)$, $\overline{Y}^*=(0{,}3;\ 1{,}5;\ 0{,}7)$, откуда $\Delta z_{\min}=\overline{Y}^*\ \Delta\overline{a}_0=2{,}7$; 2) $\Delta\overline{a}_0=(0{,}5;\ 0{,}5)$, $\overline{Y}^*=(3,\ 2)$, $\Delta z_{\max}=2{,}5$; 3) $\Delta\overline{a}_0=(-1,\ -1,\ 1)$, $\overline{Y}^*=(0{,}5;\ 0;\ -0{,}5)$, $\Delta z_{\max}=-1$.

109. 1) $\overline{X}^*=(0,\ 0,\ 400,\ 550)$, $x_5^*=x_6^*=0$ и $x_7^*=50$, или $\overline{X}^*=(92,\ 0,\ 369,\ 507)$, $x_5^*=x_6^*=x_7^*=0$; $z_{\max}=9000$, 2) $\overline{Y}^*=(3;\ 1{,}5;\ 0)$, 3) $\Delta z_1=3\cdot40=120$, $\Delta z_2=1{,}5\cdot(-30)=-45$, $\Delta z_3=0\cdot50=0$, $\Delta z_{\max}=7{,}5$; 4) для 1 ед. III рес. $-0{,}25$ I рес. и $-1{,}96$ II рес.; 5) затраты составят: $2\cdot3+4\cdot1{,}5+2\cdot0=12$, прибыль 18, следовательно, выгодно. **110.** 1) $\overline{X}^*=(70,\ 31,\ 36)$; 3) $a_{01}=a_{02}=a_{03}=0$, $a_{04}=0{,}3$; 4) $\Delta z=3{,}6$. **111.** 1) 94, $x_2=14$ и $x_3=8$; 3) оценки изделий 5/41 и 3/41, сырья 1; 4) не изменились бы, 102; 5) в отношении 5 : 3; 6) в отношении 5:3; 7) целесообразна ($2\cdot5/41>3\cdot3/41$). **112.** Ответы на задачи (1) и (2) (над диагональю доли времени, под ней — число изделий):

Изделия Предприятия	I	II	III	Оценки раб. времени
А	0,274 137	0 0	0,726 290	0,97
Б	0,032 8	0,968 290	0 0	0,48
Всего	145	290	290	
Оценки изделий	$19\cdot10^{-4}$	$16\cdot10^{-4}$	$25\cdot10^{-4}$	

3) пропорционально оценкам: 9,4; 7,9; 12,4.

ГЛАВА VI

В записи решений транспортных задач указываются только положительные перевозки. **117.** 1) $x_{11}=20$, $x_{13}=20$, $x_{22}=50$, $x_{23}=10$, $z_{\min}=390$; допустимое решение: $x_{11}=8$, $x_{12}=20$, $x_{23}=12$, $x_{21}=12$, $x_{22}=30$, $x_{23}=18$; 2) $x_{11}=20$, $x_{13}=10$, $x_{22}=40$,

$x_{23}=30$, $z_{\min}=380$, доп. реш.: $x_{11}=6$, $x_{12}=x_{13}=12$, $x_{21}=14$, $x_{22}=x_{23}=28$; 3) $x_{12}=30$, $x_{13}=50$, $x_{21}=60$, $x_{22}=10$, $z_{\min}=920$, доп. реш.: $x_{11}=32$, $x_{12}=64/3$, $x_{13}=80/3$, $x_{21}=84/3$, $x_{22}=56/3$, $x_{23}=70/3$; 4) $x_{12}=40$, $x_{13}=20$, $x_{21}=30$, $x_{22}=20$, $z_{\min}=630$, доп. реш.: $x_{11}=120/11$, $x_{12}=240/11$, $x_{13}=80/11$, $x_{21}=210/11$, $x_{22}=420/11$, $x_{23}=140/11$. **120.** 1) $x_{4}=10$, $x_{12}=2$, $x_{22}=5$, $x_{32}=4$, $x_{33}=8$, $x_{34}=6$, $z_1=143$; $x_{12}=11$, $x_{13}=1$, $x_{24}=5$, $x_{31}=10$, $x_{33}=7$, $x_{34}=1$, $z_2=96$; $x_{12}=11$, $x_{11}=1$, $x_{24}=5$, $x_{31}=10$, $x_{33}=8$, $z_3=z_4=101$; 2) $x_{11}=20$, $x_{21}=50$, $x_{22}=40$, $x_{23}=20$, $x_{33}=10$, $x_{34}=60$, $x_{35}=50$, $z_1=1130$; $x_{12}=20$, $x_{23}=30$, $x_{24}=60$, $x_{25}=20$, $x_{31}=70$, $x_{32}=20$, $x_{35}=30$, $z_2=690$; $x_{15}=20$, $x_{23}=30$, $x_{24}=50$, $x_{25}=30$, $x_{31}=70$, $x_{32}=40$, $x_{34}=10$, $z_3=780$; $x_{15}=20$, $x_{23}=60$, $x_{24}=60$, $x_{25}=20$, $x_{31}=70$, $x_{32}=40$, $x_{35}=10$, $z_4=750$; 3) $x_{11}=30$, $x_{12}=90$, $x_{23}=30$, $x_{33}=40$, $x_{43}=10$, $x_{41}=20$, $x_{45}=30$, $z_1=1360$; $x_{11}=30$, $x_{33}=120$, $x_{11}=80$, $x_{13}=60$, $x_{15}=30$, $x_{22}=30$, $x_{32}=40$, $x_{42}=x_{43}=x_{44}=20$, $z_2=850$; $x_{11}=30$, $x_{13}=80$, $x_{14}=10$, $x_{22}=30$, $x_{34}=10$, $x_{35}=30$, $x_{42}=60$, $z_3=850$; $x_{11}=30$, $x_{12}=10$, $x_{13}=80$, $x_{22}=30$, $x_{32}=40$, $x_{42}=10$, $x_{44}=10$, $x_{45}=30$, $z_4=830$; 4) $x_{11}=110$, $x_{12}=20$, $x_{22}=x_{23}=x_{24}=30$, $x_{34}=x_{35}=50$, $x_{45}=50$, $x_{46}=90$, $z_1=1\,400$; $x_{11}=110$, $x_{15}=20$, $x_{22}=50$, $x_{23}=30$, $x_{24}=10$, $x_{34}=70$, $x_{35}=30$, $x_{45}=50$, $x_{46}=90$, $z_2=1280$, $x_{11}=110$, $x_{15}=20$, $x_{22}=50$, $x_{23}=30$, $x_{26}=10$, $x_{34}=80$, $x_{36}=20$, $x_{45}=80$, $x_{46}=60$, $z_3=z_4=1240$. **125.** 1) $x_{12}=35$, $x_{13}=5$, $x_{21}=10$, $x_{23}=15$, $z_{\min}=255$; 2) $x_{12}=70$, $x_{21}=25$, $x_{22}=20$, $x_{31}=15$, $z_{\min}=255$; 3) $x_{12}=30$, $x_{13}=10$, $x_{21}=20$, $x_{22}=40$, $z_{\min}=400$. **126.** 1) $x_{12}=100$, $x_{22}=40$, $x_{23}=110$, $x_{31}=80$, $z_{\min}=800$; 2) $x_{11}=x_{13}=20$, $x_{22}=50$, $x_{23}=10$, $z_{\min}=390$; 3) $x_{12}=30$, $x_{13}=50$, $x_{21}=60$, $x_{22}=10$, $z_{\min}=920$; 4) $x_{12}=11$, $x_{14}=1$, $x_{24}=5$; $x_{31}=10$, $x_{33}=8$, $z_{\min}=95$; 5) $x_{12}=20$, $x_{23}=30$, $x_{24}=60$, $x_{25}=20$, $x_{31}=70$, $x_{32}=20$, $x_{35}=30$, $z_{\min}=690$; 6) $x_{11}=x_{22}=30$, $x_{13}=80$, $x_{15}=10$, $x_{32}=40$, $x_{42}=x_{44}=x_{45}=20$, $z_{\min}=810$; 7) $x_{11}=x_{23}=30$, $x_{15}=100$, $x_{22}=50$, $x_{26}=10$, $x_{34}=x_{41}=80$, $x_{36}=20$, $x_{46}=60$, $z_{\min}=1190$. **131.** 1) $u_1=0, u_2=-2, u_3=3, v_1=2, v_2=2, v_3=3$, $v_4=5$, $v_5=2$; 2) $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=5$, $v_1=2$, $v_2=7$, $v_3=8$, $v_4=3$, $v_5=5$, $v_6=7$. **132.** $x_{11}=5$, $x_{13}=x_{21}=x_{24}=x_{31}=20$, $x_{22}=15$. **135.** См. ответы к задаче 126. **137.** 1) $\Delta z_{\min}=1$; 2) $\Delta z_{\min}=7$; 3) $\Delta z_{\min}=-9$; 4) $\Delta z_{\min}=1$. **138.** 1) $\Delta z_{\min}=5$; 2) $\Delta z_{\min}=5$; 3) на 1-м. **139.** У 2-го; $\Delta z_{\min}=-3$. **140.** На 3-м. **141.** Да. **145.** 1) $x_{12}=16$, $x_{13}=30$, $x_{21}=15$, $x_{22}=19$, $x_{34}=40$, $x_{41}=25$, $x_{44}=5$, $z_{\min}=302$; 2) $x_{11}=10$, $x_{14}=50$, $x_{21}=30$, $x_{25}=40$, $x_{32}=30$, $x_{35}=20$, $z_{\min}=290$; 3) $x_{11}=16$, $x_{15}=4$, $x_{24}=15$, $x_{25}=1$, $x_{32}=2$, $x_{33}=12$, $x_{42}=16$, $x_{45}=6$, $z_{\min}=153$; 4) $x_{11}=10$, $x_{13}=15$, $x_{15}=5$, $x_{26}=5$, $x_{35}=45$, $x_{42}=35$, $x_{45}=5$, $x_{54}=25$, $x_{56}=5$, $z_{\min}=220$. **146.** 1) $x_{11}=16$, $x_{13}=30$, $x_{21}=10$, $x_{22}=19$, $x_{24}=5$, $x_{34}=40$, $x_{41}=30$; 2) $x_{14}=50$, $x_{15}=10$, $x_{21}=40$, $x_{25}=30$, $x_{32}=30$, $x_{33}=20$; 3) $x_{11}=16$, $x_{12}=4$, $x_{22}=5$, $x_{25}=11$, $x_{32}=2$, $x_{33}=12$, $x_{42}=7$, $x_{44}=15$; 4) $x_{13}=x_{14}=15$, $x_{26}=5$, $x_{34}=10$, $x_{35}=x_{42}=35$, $x_{45}=5$. **148.** $x_{11}=150$, $x_{22}=100$, $x_{24}=120$, $x_{25}=80$, $x_{33}=120$, $x_{44}=80$. **149.** $x_{11}=150$, $x_{15}=50$, $x_{22}=80$, $x_{24}=120$, **150.** Из склада A_1 отправляется I потребителю 2000 т марки «а» и 4000 т марки «б»; потребности II потребителя удовлетворяются из склада A_2. По 1000 т марки «а» оставляется на складах A_1 и A_2. **151.** $x_{11}=350$ «а» и 100 «б», $x_{12}=50$ «а» и 150 «б», $x_{22}=300$ «а» и 100 «б», $x_{31}=100$ «б», $x_{12}=100$ «а», $x_{33}=100$ «а» и 50 «б». **153.** 1)

$$X_C=\begin{pmatrix} . & . & . & 30 & 40 \\ . & 60 & . & 20 & . \\ 20 & . & 70 & . & . \end{pmatrix},\quad X_t=\begin{pmatrix} . & 20 & . & 50 & . \\ 20 & 20 & . & . & 40 \\ . & 20 & 70 & . & . \end{pmatrix},$$

$$X_T=\begin{pmatrix} . & . & . & 50 & 20 \\ 20 & 40 & . & . & 20 \\ . & 20 & 70 & . & . \end{pmatrix};\quad 2)\ X_C=\begin{pmatrix} . & . & 60 & . & . \\ . & . & . & 35 & 5 \\ . & 80 & . & . & 20 \\ 30 & . & 35 & . & . \end{pmatrix},\quad X_t=$$

$$=X_T=\begin{pmatrix} . & 40 & 20 & . & . \\ . & . & 40 & . & . \\ 30 & . & 35 & 35 & . \\ . & . & 10 & . & 40 \end{pmatrix}\quad 3)\ X_C=X_t=X_T=\begin{pmatrix} . & 15 & 10 & 15 \\ . & 25 & . & . \\ 15 & . & 20 & . \end{pmatrix}.$$

154. $x_{11}=50$, $x_{12}=200$, $x_{13}=110$, $x_{15}=100$, $x_{23}=340$, $x_{31}=100$, $x_{34}=100$; **155.** $x_{11}=100$, $x_{12}=x_{31}=x_{34}=300$, $x_{22}=500$, $x_{23}=200$, $z_{\min}=13\,600$. **156.** Расширить мощность 2-го завода на 100 ед. и построить новый завод с производит. $a_4=300$ ед., при этом $x_{12}=500$, $x_{21}=400$, $x_{23}=x_{24}=200$, $x_{34}=600$, $x_{42}=300$. **157.** Увеличить производит. 2-го карьера; при этом $x_{12}=11$, $x_{13}=30$, $x_{14}=5$, $x_{21}=40$, $x_{22}=24$, $x_{34}=40$. **159.** 1) $x_{11}=7$, $x_{13}=5$, $x_{14}=18$, $x_{21}=13$, $x_{24}=12$, $x_{32}=15$, $x_{33}=20$, $x_{34}=10$; 2) $x_{11}=5$, $x_{12}=25$, $x_{13}=15$, $x_{21}=40$, $x_{22}=5$, $x_{23}=20$, $x_{31}=25$, $x_{32}=0$, $x_{33}=15$; 3) $x_{11}=15$, $x_{12}=1$, $x_{13}=9$, $x_{14}=10$, $x_{21}=15$, $x_{22}=14$, $x_{23}=26$, $x_{24}=15$; 4) неразрешима; 5) $x_{12}=30$, $x_{22}=x_{23}=x_{31}=x_{33}=10$, $x_{32}=x_{41}=20$, $x_{11}=x_{21}=x_{42}=x_{43}=0$.

ГЛАВА VII

164. $x_{11}=10$, $x_{14}=35$, $x_{22}=20$, $x_{33}=30$, $x_{34}=5$, $z_{\max}=565$. **165.** $x_{11}=20$, $x_{12}=40$, $x_{23}=25$, $x_{25}=5$, $x_{34}=45$, $x_{45}=25$. **166.** $x_{14}=70$, $x_{22}=40$, $x_{31}=30$, $x_{32}=x_{34}=10$, $x_{43}=30$, излишек 4-го сорта 10 т. **167.** $x_{12}=10$, $x_{13}=20$, $x_{24}=70$, $x_{31}=30$, $x_{32}=70$, $x_{44}=30$, мощность 1-го предприятия используется только в количестве 30 тыс. шт. **168.** $x_{12}=350$, $x_{24}=350$, $x_{33}=250$, $x_{34}=50$, $x_{41}=150$, $x_{44}=150$, $x_{53}=200$, избыточная мощность 1-й мастерской 550 шт., а 2-й — 150 шт.; $z_{\min}=2750$ руб. **169.** $x_{13}=50$ га, $x_{14}=250$ га, $x_{21}=300$ га, $x_{22}=x_{23}=100$ га, $x_{32}=400$ га. **170.** $x_{11}=206$ т, $x_{21}=152$ т, $x_{22}=208$ т, $x_{23}=440$ т, $x_{32}=133$ т, $x_{34}=267$ т и излишек 1-го сорта $x_{15}=94$ т. **171.** $x_{12}=67$ ч, $x_{13}=100$ ч, $x_{14}=50$ ч, $x_{21}=42$ ч, $x_{24}=118$ ч, $x_{31}=150$ ч, излишек $x_{15}=23$ ч. **172.** $x_{12}=57{,}7$ ч. $x_{13}=142{,}3$ ч, $x_{23}=300$ ч, $x_{32}=250$ ч, $x_{41}=400$ ч; не хватает произв. мощности для изготовления ткани 3-го артикула в количестве 53 тыс. м. **173.** $x_{11}=x_{12}=4{,}8$ т, $x_{14}=0{,}4$ т, $x_{23}=1$ т, $x_{24}=4{,}6$ т, $x_{33}=5$ т и излишек $x_{25}=2{,}4$ т. **174.** $x_{12}=4250$ шт., $x_{13}=4500$ шт., $x_{21}=3000$ шт., $x_{22}=6250$ шт., $x_{14}=1500$ шт., $x_{32}=4500$ шт. и избыток времени на I станке 5 станко-часов. **175.** 1) $x_{12}=420$ шт., $x_{13}=360$ шт., $x_{14}=600$ шт., $x_{21}=1500$ шт., $x_{25}=360$ шт., $x_{32}=1680$ шт., $x_{45}=3240$ шт.; 2) любой план, в том числе найденный в п. 1); 3) $x_{12}=420$ шт., $x_{13}=360$ шт., $x_{14}=600$ шт., $x_{21}=1500$ шт., $x_{25}=360$ шт., $x_{32}=1680$ шт., $x_{45}=3240$ шт. **176.** $x_{11}=300$ га, $x_{22}=375$ га, $x_{23}=25$ га, $x_{33}=233$ га, $x_{34}=167$ га, излишек 100 га на II участке. **178.** 1) $x_{11}=150$ кг, $x_{14}=150$ кг, $x_{21}=45$ кг, $x_{23}=155$ кг, $x_{32}=180$ кг, $x_{33}=247{,}5$ кг, остаток $x_{35}=22{,}5$ кг; 2) $x_{13}=270$ кг, $x_{21}=5$ кг, $x_{22}=120$ кг, $x_{24}=75$ кг, $x_{31}=172{,}5$ кг, $x_{33}=277{,}5$ кг, остаток $x_{15}=30$ кг; 3) $x_{11}=151$ кг, $x_{14}=138$ кг, $x_{23}=200$ ч, $x_{31}=49$ кг, $x_{32}=193$ кг, $x_{33}=206$; излишек $x_{15}=11$кг. **179.** 1) $x_{11}=160$ ч, $x_{12}=150$ ч, $x_{13}=30$ ч, $x_{23}=233$ ч, остаток времени на II станке 97 ч; 2) $x_{11}=160$ ч, $x_{12}=10$ ч, $x_{13}=30$ ч, $x_{22}=196$ ч, остаток времени на II станке 154 ч; 3) совпадает с решением в п. 2). **182.** 1) Да, имеется излишек мощности; 2) $x_{12}=1/3$ (80 кост.), $x_{14}=2/3$ (100 кост.), $x_{21}=3/4$ (180 кост.), $x_{22}=7/30$ (70 кост.), $x_{23}=1/60$ (≈ 3 кост.), $x_{33}=29/90$ (97 кост.), излишек $x_{35}=61/90$ (≈ 8кост.) **183.** 1) $x_{12}=5$ га, $x_{13}=25$ га, $x_{21}=50$ га, $x_{32}=7{,}5$ излишек $x_{34}=12{,}5$ га; 2) $x_{11}=12{,}4$ га, $x_{12}=17{,}6$ га, $x_{21}=45{,}8$ га, $x_{23}=4{,}2$ га, $x_{33}=20$ га, 3) $x_{11}=16{,}3$ га, $x_{21}=0{,}6$ га, $x_{22}=24{,}0$ га, $x_{23}=25{,}4$ га, $x_{33}=20$ га, излишки $x_{14}=13{,}7$ га и $x_{34}=1{,}7$ га. **184.** $x_{11}=10$, $x_{21}\approx 0$, $x_{22}=16{,}75$, $x_{23}\approx 8{,}25$, $x_{33}=20$, $x_{34}=20$, не хватает самолетов для перевозки 3860 пассажиров. **185.** $x_{12}=1$, $x_{21}=3/20$, $x_{23}=17/20$, $x_{31}=9/20$, $x_{32}=11/20$, $z_{\max}=2550$ комплектов (x_{ik}—доля месяца, в течение которой i-е предприятие производит k-е изделие). **188.** $x_{11}=x_{23}=x_{32}=1$, т. е. I предприятие производит 1-е изделие, II — 3-е и III — 2-е. **189.** $x_{11}=x_{23}=x_{42}=1$; III предприятие не используется. **190.** $x_{13}=x_{22}=x_{31}=x_{45}=x_{54}=1$. **191.** $x_{13}=x_{22}=x_{31}=x_{45}=x_{51}=1$. **192.** $x_{12}=x_{23}=x_{31}=x_{44}=1$.

ГЛАВА VIII

193. 1) $\overline{Y}=(30{,}8;\ 15{,}4)$; 2) $\overline{Y}=(13{,}4;\ 4{,}8)$; 3) $\overline{Y}=(35,\ 10)$. **194.** 1) $x_A=0$, $x_B=600$; 2) $x_A=200-200t$, $x_B=600t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$; 3) $x_A=200$, $x_B=0$. **195.** 1) $x_1=300$, $x_2=600$; 2) $x_1=1500$, $x_2=600$; 3) $x_1=600$, $x_2=1000$. **196.** 1) $x_A=60$, $x_B=50$; 2) $x_A=60-20t$, $x_B=50+10t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$; 3) $x_A=50$, $x_B=60$; 4) $x_A=50$, $x_B=55$. **197.** 5 скорых и 7 пассажирских. **198.** 6 скорых и 6 пассажирских. **199.** В стеклянной $10t$ и в жестяной $8-8t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. **200.** Сена 20 кг и силоса 40 кг. **201.** $x_{12}=12/19$, $x_{13}=7/19$, $x_{21}=7/19$, $x_{22}=12/19$, где x_{ik}—доля времени работы i-го станка ($i=1,2$) по выпуску k-й детали. **202.** $x_A=1$, $x_B=8$, $z_{\max}=67$ тыс. руб. **204.** 1) $x_3=16$, $z_{\max}=910$; 2) $x_2=8$, $x_3=0{,}45$, $x_1=0{,}9$, $z_{\max}=268$; 3) $x_3=6{,}82$, $x_4=4{,}71$, $z_{\max}=608$; 4) $\Delta_3 z=7$, $\Delta_1 z=\Delta_2 z=0$; 5) $x_3=21$, $z_{\max}=2520$; 6) тот же, что в задаче 1). **205.** 1) $x_1=167$, $z_{\max}=3200$; 2) $x_1=130$, $x_2=130$, $x_3=30$, $z_{\max}=2660$; 3) $x_3=160$, $z_{\max}=2400$; 4) $x_1=50$, $x_2=300$, $x_4=5$, $T_{\max}=6500$; 5) целесообразно увеличение трудовых ресурсов; $\Delta z_{\max}=4$ руб. на 1 чел.-ч. **206.** 1) $x_2=76\,923$, $x_3=76\,923$, $T_{\max}=2\,692\,305$ руб.; 2) 20 408 компл. 3) $x_1=2\,500$, $x_2=150\,000$;

4) то же, что и в задаче 1); 5) $a_{04}=a_{05}=0$, $a_{06}=1{,}54$, $a_{07}=1{,}15$. **208.** 1) Бензин A в кол-ве 600 л и неиспользованные полуфабрикаты $u_1=400$, $u_2=250$ л, $u_3=100$ л; 2) бензин B в кол-ве 700 л., остаются неиспользованными $u_1=100$ л, $u_2=150$ л и $u_3=250$ л, **209.** 1) $x_1=16{,}7$, $x_3=6{,}45$; 2) $x_1=12$, $x_2=9{,}25$, $x_3=6{,}75$; 3) $x_1=10$, $x_2=13{,}1$, $x_3=6{,}87$; 4) Стоимость уменьшается на 1,19 коп/кг; 5) 1 кг сена заменяется на 0,63 кг силоса или на 1,94 кг концентратов. **210.** Рацион B: 200 ц силоса и 200 ц трав и рацион C: 100 ц трав, $z_{\max}=5300$. **211.** $x_1=x_2=2{,}5$ кг. **212.** 400 ед. обыкновенного сплава, 700 ед. — специального и 200 ед. декоративного. **215.** Не имеет решения. **216.** $x_1=0{,}445$, $x_2=0{,}3325$, $x_3=0{,}2225$. **217.** $x_{11}=153$, $x_{13}=243$, $x_{21}=28$, $x_{23}=222$, где x_{ik} обозначают число листов i-й партии, раскраиваемых по k-му способу. **219.** $x_1=5{,}2$, $x_2=0{,}16$. **220.** $x_2=18$, $x_3=4$. **221.** $x_1=64$, $x_4=30{,}8$, $x_5=92{,}4$. **222.** 1) 1-й и 2-й способы для изготовления деталей III типа в кол-ве 357 и 245 шт., соответственно; 2) 238 шт. I типа по 1-му способу, 476 шт. II типа — по 3-му, 220 шт. III типа — по 2-му; 3) 153 шт. I типа по 2-му способу, 75 шт. II типа — по 2-му, 870 шт. II типа — по 3-му и 100 шт. III типа — по 3-му. **223.** 1-й способ: 6,67A и 13,33B, 2-й способ: 3,33A и 1,67B. **226.** $x_1=45$, $x_2=35$, $x_3=35$, $x_4=20$. **227.** Совпадает с решением задачи 225. **228.** $x_1=50$, $x_2=41{,}25$, $x_3=41{,}25$, $x_5=41{,}25$, $x_6=30$. **229.** $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=4$. **230.** $x_1=70$, $x_2=100$, $x_3=100$, $x_4=0$, $y_1=100$, $y_2=100$, $y_3=0$, $y_4=100$, где x_i и y_i — соответственно размеры покупок и продаж в i-м квартале. **231.** $x_1=30$, $x_2=60$, $x_3=40$, $x_4=20$, $y_1=y_3=y_1=0$, $y_2=10$, где x_i и y_i — соответственно, объемы производства в дневные и ночные смены в i-м квартале. **233.** $x_1=215$, $x_2=200$, $x_3=123$. **234.** $x_1=85$, $x_2=142$, $x_3=98$. **235.** $x_1=27$, $x_2=179$, $x_3=77$. **236.** $k_1=45$, $k_2=50$, $k_3=60$. **237.** $k_1=100$, $k_2=16$, $k_3=8$. **238.** $x_{13}=120$, $x_{23}=40$, $x_{33}=80$, где x_{ik} обозначает стоимость орудий труда, созданных i-й отраслью и направляемых в k-ю отрасль. **239.** $x_{13}=71$, $x_{23}=50$, $x_{33}=80$. **240.** 1) Первые три сплава в равном кол-ве; 2) только II сплав; 3) $x_4=0{,}25$ и $x_5=0{,}75$. **241.** 1) I и II проекты — по 50 домов; 2) I проект — 37 домов, V — 33 дома, II, III и IV — по 10 домов; 3) IV проект — 100 домов. **243.** $x_{11}=x_{12}=x_{22}=20$, $x_{14}=30$, $x_{33}=50$ и $x_{34}=10$, где x_{ik} обозначает число k-х датчиков, закрепленных за i-м самописцем. **244.** Закрепленные за A — в 12^{00}, за B — в 10^{00}, 15^{00} и 22^{00}; $T_{\min}=8$ ч. **245.** 20 газохранилищ II типа и 10 — III типа. **246.** $u_0=160$, $u_4=5$, $x_4=25$, $y_4=20$, где u_i — запасы, x_i — выпуск при сверхурочной работе и y_i — выпуск с помощью дополнительного оборудования в i-м квартале.

ГЛАВА IX

255. 1) $\alpha=\alpha_3=0{,}4$, $\beta=\beta_2=0{,}6$; 2) $\alpha=\beta=v=4$, (A_2, B_3); 3) $\alpha=\beta=v=5$, (A_2, B_2); 4) $\alpha=\beta=v=6$, (A_3, B_2); 5) $\alpha=\beta=v=6$, (A_2, B_3); 6) $\alpha=\alpha_2=4$, $\beta=\beta_1=\beta_3=6$. **257.** $2x_1y_1+x_1y_2+3x_1y_3+4x_2y_1+2x_2y_2+5x_2y_2$, $\alpha=\beta=v=2$, (A_2, B_2); $\overline{X}^*=(0,1)$, $\overline{Y}^*=(0, 1, 0)$, $f(\overline{X}^*, \overline{Y}^*)=2=v$, $f(\overline{X}, \overline{Y}^*)=x_1+2x_2=2-x_1$, $f(\overline{X}^*, \overline{Y})=4y_1+2y_2+5y_3=2+2y_1+3y_3$. **258.** $\frac{71}{120}$, $\frac{23}{4}$.

259. Если $a'_{ik}=a_{ik}+d$, то $f'(\overline{X}, \overline{Y})=f(\overline{X}, \overline{Y})+d$. **261.** 1) Исключаются последовательно B_2, B_3, B_4, A_1, A_3, B_5 и A_2; получаем $v=4$ и $\overline{X}^*=(0, 0, 0, 1)$, $\overline{Y}^*=(1, 0, 0, 0)$; 2) исключаются B_1, A_4 и A_1, остается $\Pi=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 1{,}0\end{pmatrix}$; 3) исключаются A_1, B_2, B_3 и A_3, остается $\Pi=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. **265.** 1) $\overline{X}^*=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v=0$; 2) $\overline{X}^*=(1, 0)$. $\overline{Y}^*=(1, 0)$, $v=2$; 3) $\overline{X}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v=\frac{3}{2}$; 4) $\overline{X}^*=\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$, $v=\frac{7}{4}$; 5) $\overline{X}^*=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v=0{,}3$; 6) $\overline{X}^*=(1, 0)$, $\overline{Y}^*=(0, 1)$, $v=0$. **267.** 1) $\overline{X}^*=\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(0, 0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0\right)$, $v=\frac{39}{7}$; 2) $\overline{X}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $v=\frac{7}{2}$; 3) $\overline{X}^*=(1, 0)$, $\overline{Y}^*=(0, 1, 0, 0, 0)$, $v=3$; 4) $\overline{X}^*=\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(0, \frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7}\right)$, $v=\frac{4}{7}$. 5) $\overline{X}^*=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $v=\frac{11}{3}$; 6) $\overline{X}^*=\left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $v=\frac{21}{5}$; 7) $\overline{X}^*=\left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $v=4$; 8) $\overline{X}^*=\left(\frac{7}{9}, 0, 0, \frac{2}{9}, 0\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $v=\frac{44}{9}$; 9) $\overline{X}^*=\left(0, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $\overline{Y}^*=\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $v=\frac{7}{6}$. **269.** $\overline{X}^*=(0{,}4;\ 0;\ 0{,}6)$, $\overline{Y}^*=(0{,}2;\ 0{,}8;\ 0)$, $v=0{,}54$. 2) $\overline{X}^*=(0, 1, 0)$, $\overline{Y}^*=(0, 0, 1)$, $v=4$; 3) $\overline{X}^*=(0, 1, 0)$, $\overline{Y}^*=(0, 1, 0)$, $v=5$; 4) $\overline{X}^*=(0, 0, 1, 0)$, $\overline{Y}^*=(0, 1, 0, 0, 0)$, $v=6$; 5) $\overline{X}^*=(0, 1, 0, 0)$, $\overline{Y}^*=(0, 0, 1, 0)$, $v=6$. **273.** Выпускать 50% продукции А и 50% продукции В. При этом $v=5$. **274.** На склад отправляется 1/3 и на дополнительную обработку 2/3 всей продукции. Стратегия A не применяется. **275.** Следует применять стратегию A_3, т. е. закупать 18 т. угля. **276.** 17% товара А и 83% товара В.

ГЛАВА X

284. 1) (3, 13), $z_{\max}=48$; 2) (1, 2), $z_{\max}=11$; 3) (0, 2) или (1, 1), $z_{\max}=2$; 4) (9, 1), $z_{\max}=9$; 5) (5, 3), $z_{\max}=5$; 6) (0, 0, 11, 3, 1), $z_{\max}=24$; 7) (2, 2, 3, 1), $z_{\max}=2$; 8) (1, 3, 0, 0, 1), $z_{\min}=2$; 9) (0, 3, 2, 0) или (1, 2, 1, 1), или (2, 1, 0, 2), $z_{\max}=16$; 10) (0, 3, 3, 0), или (1, 2, 2, 1), или (2, 1, 1, 2), или (3, 0, 0, 3), $z_{\max}=3$; (1, 1, 1, 2, 1, 1), $z_{\min}=3$; 12) (1, 2, 1, 1), $z_{\max}=11$. **288.** 1) (0, 2), $z_{\max}=2$; 2) $x_1=9$, $\frac{3}{8}\leqslant x_2\leqslant 1$,

$z_{\max}=9$; 3) $(1,\ 1)$, $z_{\max}=1{,}25$; 4) $\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$, $z_{\max}=2{,}5$; 5) $\left(0,\ 1,\ \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$, $z_{\max}=\frac{65}{6}$; 6) $\left(0,\ \frac{82}{57},\ 1,\ \frac{89}{19},\ \frac{278}{190}\right)$, $z_{\max}=\frac{499}{57}$; $(1;\ 1{,}6)$, $z_{\max}=17{,}62$. **289.** $\left.\begin{aligned}-29x_1+60x_2+x_3&=174\\ 3x_1-\ \ x_2+x_4&=\ \ 1\end{aligned}\right\}$; $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ — неотр. и целочисл.; $\left.\begin{aligned}50x_1+100x_2+x_3&=175\\ 10x_1+\ \ 3x_2+x_4&=175\end{aligned}\right\}$; $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ — неотр. и целочисл. **297.** 0, 2, 1, 3, 0; $z_{\min}=140$. **301.** 6, 10, 7, 2, 1, 9, 4, 3, 5, 8; $T_{\min}=175$. 308. III—240, IV—560, V—300; $z_{\max}=450$. 310. 2-й продукт следует изготовлять II способом ($x_{22}=100$); $z_{\max}=2500$.

ГЛАВА XI

324. 1) $z_{\min}=13\frac{152}{179}$ при $x=2\frac{22}{29}$, $y=4\frac{26}{29}$ и $z_{\max}=80$ при $x=0$, $y=0$; 2) $z_{\min}=0$ при $x=2$, $y=4$ и $z_{\max}=41$ при $x=7$, $y=0$; 3) $z_{\min}=13$ при $x=5$, $y=4$ и $z_{\max}=98$ при $x=0$, $y=0$; 4) $z_{\min}=0$, при $x=6$, $y=2$ и $z_{\max}=52$ при $x=0$, $y=6$. **325.** 1) $z_{\min}=0$ при $x=0$, $y=0$ и $z_{\max}=6\sqrt{5}$ при $x=2{,}4\cdot\sqrt{5}$, $y=1{,}2\cdot\sqrt{5}$; 2) $z_{\min}=-6$ при $x=6$, $y=0$ и $z_{\max}=12$ при $x=0$, $y=6$; 3) $z_{\min}=0$ при $x=3$, $y=2$ и $z_{\max}=49-12\sqrt{13}$ при $x=18/\sqrt{13}$, $y=12/\sqrt{13}$; 4) $z_{\min}=88-24\sqrt{13}$ при $x=12/\sqrt{13}$, $y=18/\sqrt{13}$ и $z_{\max}=52$ при $x=0$, $y=0$. **326.** 1) $z_{\min}=0$ при $x=0$, $y=0$ и $z_{\max}\to\infty$; 2) $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=1$ и $z_{\max}\to\infty$; 3) $z_{\min}=0$ при $x=4$, $y=3$ и $z_{\max}\to\infty$; 4) $z_{\min}\to-\infty$ и $z_{\max}\to\infty$. **327.** 1) $z_{\min}=8$ при $x=8$, $y=0$ и $z_{\max}=14+6\sqrt{10}$ при $x=5+6\sqrt{0{,}1}$, $y=3+18\sqrt{0{,}1}$; 2) $z_{\min}=8$ при $x=8$, $y=0$ или $x=5+\sqrt{4{,}5}$, $y=3-\sqrt{4{,}5}$, или $x=5-\sqrt{4{,}5}$, $y=3+\sqrt{4{,}5}$, или $x=5-3\sqrt{2}$, $y=3+3\sqrt{2}$ и $z_{\max}=8+6\sqrt{2}$ при $x=5+3\sqrt{2}$, $y=3+3\sqrt{2}$; 3) $z_{\min}=43-12\sqrt{0{,}5}$ при $x=5-3\sqrt{0{,}5}$, $y=3+3\sqrt{0{,}5}$ и $z_{\max}=40+12\sqrt{34}$ при $x=5+30/\sqrt{34}$, $y=3+18/\sqrt{34}$; 4) $z_{\min}=6\sqrt{2}-3$ при $x=5-3\sqrt{2}$, $y=3+3\sqrt{2}$ и $z_{\max}=33+8\sqrt{17}$ при $x=y=4+\sqrt{17}$. **328.** 1) $z_{\min}=0$ при $x=y=0$ и $z_{\max}=8$ при $x=8$, $y=0$, или $x=0$, $y=8$; 2) $z_{\min}=2$ при $x=y=3$ и $z_{\max}=32$ при $x=0$, $y=0$, или $x=0$, $y=8$, или $x=8$, $y=0$; 3) $z_{\max}=3{,}48$ при $x=1{,}35$, $y=5{,}56$ и $z_{\max}=169$ при $x=8$, $y=0$; 4) $z_{\min}=0$ при $x=5$, $y=0$ и $z_{\max}=13$ при $x=0$, $y=8$. **329.** 1) $z_{\min}=2$ при $x=2$, $y=0$, и $z_{\max}=11$ при $x=6$, $y=5$; 2) $z_{\min}=5$ при $x=6$, $y=5$ и $z_{\max}=74$ при $x=2$,

$y=0$; 3) $z_{\min}=0$ при $x=4$, $y=2$ и $z_{\max}=13$ при $x=2$, $y=5$ или $x=6$, $y=5$; 4) $z_{\min}=-2$ при $x=2$, $y=0$ или $x=6$, $y=0$ и $z_{\max}=3$ при $x=4$, $y=3$ или $x=6$; $y=5$. **337.** 1) вогн. ; 2) вогн. ; 3) вып. ; 4) вып. ; 5) вып. ; 6) вогн. ; 7) вогн. ; 8) вогн. ; 9) ни вып, ; ни вогн. ; 10) вып. ; 11) вогн. ; **340.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & -1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. **342.** 3) неотриц. ; 4) неопр. ; 5) неопр. ; 6) полож. ; 7) неопр. ; 8) неопр. ; **343.** 1) ни вып. , ни вогн. , 2) ни вып. ; ни вогн. ; 3) вогн. ; 4) вогн. ; 5) вып. **345.** 1) $z_{\min}=-236$ при $x=-5$, $y=1$; $z_{\max}=34$, $x=5$, $y=1$; 2) $z_{\min}=\frac{4}{3}$ при $x=y=\frac{1}{3}$; $z_{\max}=42$ при $x=0$, $y=4$ или $x=4$, $y=0$; 3) $z_{\min}=-3$ при $x=1$, $y=-1$; $z_{\max}=8$ при $x=0$, $y=2$; 4) $z_{\min}=-16$ при $x=0$, $y=4$ или $x=0$, $y=-4$; $z_{\max}=16$ при $x=4$, $y=0$ или $x=-4$ $y=0$; 5) $z_{\min}=-531$ при $x=5{,}33$, $y=2{,}66$; $z_{\max}=0{,}016$, $x=0{,}5$, $y=0{,}25$; 6) $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=0{,}5$; $z_{\max}=9$ при $x=2$, $y=0$, или $x=0$, $y=1$; 7) $z_{\min}=-48$ при $x=-4$, $y=0$; $z_{\max}=208$ при $x=4$, $y=0$; 8) $z_{\min}=-768$ при $x=0$, $y=16$ или $x=16$, $y=0$; $z_{\max}=640$ при $x=8$, $y=8$. **346.** 1) $z_{\max}=22$ при $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=0$; 2) $z_{\min}=-20$ при $x_1=0$, $x_2=0$; 3) $z_{\max}=0$ при $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2$; 4) $z_{\min}=-3{,}55$, $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=-1{,}33$. **347.** 1) $z_{\min}=-4$ при $x_1=2$, $x_2=0$; $z_{\max}=6$ при $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $z_{\min}=0$ при $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2$; $z_{\max}=440$ при $x_1=0$, $x_2=15$, $x_3=0$; 3) $z_{\min}=0$ при $x_1=0$, $x_2=0$; $z_{\max}=8$ при $x_1=2\sqrt{2}$, $x_2=2\sqrt{2}$; 4) $z_{\max}=1{,}75$ при $x_1=1$, $x_2=0{,}5$, $x_3=0$; $x_4=2$. **349.** 1) $z_{\min}=0{,}25$ при $x_1=0{,}5$, $y=0{,}5$; $z_{\max}=1$ при $x=0$, $y=1$ или $x=1$, $y=0$; 2) $z_{\min}=6{,}75$ при $x=1{,}5$, $y=\pm 0{,}5\sqrt{7}$; $z_{\max}=19$ при $x=-2$, $y=0$; 3) $z_{\min}=4{,}8$ при $x=2{,}2$, $y=3{,}8$; $z_{\max}=77$ при $x=6$, $y=0$; 4) $z_{\min}=-16$ при $x=0$, $y=-4$; $z_{\max}=16$ при $x=4$, $y=0$; 5) $z_{\max}=6{,}5-0{,}5\sqrt{10}$ при $x=3{,}5-0{,}3\sqrt{10}$, $y=3-0{,}2\sqrt{10}$; $z_{\max}=8+\sqrt{3}$ при $x=4+\sqrt{3}$, $y=3$; 6) $z_{\min}=20$ при $x=-1$, $y=3$; $z_{\max}=72$ при $x=-3$, $y=-1$. **351.** 1) (3, 3, 3), (1, 1, —1), (1, —1, 1), (—1, 1, 1), 2) (2, 2, 2), 3) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; 4) (0, 0, 0, 4), (0, 0, 4, 0), (0, 4, 0, 0), (4, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1); 5) (2,18; 1,45; 4,36), $\lambda=8{,}73$. **353.** 1) (0, 0, 0) (4, 4, 4); 2) $x_1=x_2=0$, $x_3\leqslant 6$; $x_1=x_3=0$, $x_2\leqslant 6$; $x_2=x_3=0$, $x_1\leqslant 6$;

$x_1 = x_2 = x_3 = 0{,}66\sqrt{6}$; $x_1 = x_2 = x_3 = -0{,}66\sqrt{6}$; $x_1 = x_2 = 2 + 0{,}66\sqrt{3}$, $x_3 = 2 - 1{,}33\sqrt{3}$; $x_1 = x_2 = 2 - 0{,}66\sqrt{3}$, $x_3 = 2 + 1{,}33\sqrt{3}$; 3) $(1, -2, 2)$, $(-1, 2, -2)$; 4) $(0, 0, 0)$, 5) $(0, 0, 0)$, $(1{,}33;\ 1{,}33;\ 1{,}33)$; 6) $(0, 0, 0)$, $(1{,}5;\ 1{,}5;\ 11{,}8)$. **354.** $\Delta z_{\min} \approx 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$ (точное значение 0,105); $\Delta z_{\max} = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ (точное значение 0,21). **355.** 1) $\Delta z_{\min} \approx 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$; $\Delta z_{\max} \approx (15/4)\,0{,}2 = 0{,}75$; 2) $\Delta z_{\min} \approx -0{,}6$, $\Delta z_{\max} \approx -1{,}125$. **356.** $\Delta z_{\max} \approx 7{,}72$ при $x_1 = 2{,}09$, $x_2 = 0{,}28$, $x_3 = 1{,}47$; $\Delta z \approx -0{,}68$.

ГЛАВА XII

358. 1) $z_{\max} = 4/3$ при $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$; 2) $z_{\max} = 8/29$ при $x_1 = 14$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$; 3) $z_{\max} = \frac{2}{3}$ при $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 4$; 4) $z_{\min} = 5/6$ при $x_1 = 2{,}2$, $x_2 = 0{,}6$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 0{,}2$; 5) $z_{\max} = 21/38$ при $x_1 = 5{,}5$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 0$; 6) $z_{\min} = -4/13$ при $x_1 = x_2 = 5$, $x_3 = 10$, $x_4 = 0$, $x_5 = 16$, $x_6 = 0$; 7) $z_{\max} = 3$ при $x_1 = x_2 = 0$; 8) $z_{\min} = -1/91$ при $x_1 = 4{,}6$, $x_2 = 2{,}4$; 9) $z_{\max} \to \infty$. **360.** 1) $z_{\min} = -22/9$ при $x_1 = 14/9$, $x_2 = 2/3$; 2) $z_{\min} = -273/13$ при $x_1 = 4/13$, $x_2 = 33/13$, 3) $z_{\max} = 1{,}75$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 4{,}5$, $x_4 = 8$; 4) $z_{\max} = 0$, при $x_1 = x_2$, $0 \leqslant x_1 \leqslant 10/3$. **361.** 1) $z_{\min} = -13$ при $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; 2) $z_{\max} = 35$ при $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}6$; 3) $z_{\max} = 154{,}8$ при $x_1 = 8$, $x_2 = 5{,}6$; 4) $z_{\max} = 45$ при $x_1 = 7{,}5$, $x_2 = 6$; 5) $z_{\min} = -344$ при $x_1 = 10$, $x_2 = 4$; 6) $z_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$. **362.** 1) $z_{\min} = -1$ при $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$; 2) $z_{\max} = -12$ при $x_1 = x_2 = 4$, $x_3 = 0$; 3) $z_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $z_{\max} = 6$ при $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 3$. **363.** 1) $(0{,}5; -1{,}25)$; 2) $(-2, 0)$; 3) $(4, 2)$; 4) $(1, -1)$. **364.** 1) $(4, 8)$; 2) $(8, -2)$; 3) $(8, 6)$; 4) $(0, -1)$. **367.** $\overline{\nabla z} = (c_1, \ldots, c_k, \ldots, c_n)$. **370.** 1) $z_{\min} = -481$ при $x_1 = 5$, $x_2 = 4$; 2) $z_{\min} = -4{,}5$ при $x_1 = 2$, $x_2 = -0{,}5$; 3) $z_{\min} = -18$ при $x_1 = 3$, $x_2 = 0$; 4) $z_{\max} = 10$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **371.** $z_{\max} = 73$ при $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. **373.** 1) $z_{\max} = 118{,}45$ при $x_1 = 4{,}4$, $x_2 = 5{,}8$; 2) $z_{\max} = 85{,}8$ при $x_1 = 7{,}1$, $x_2 = 7{,}1$; 3) $z_{\max} = 256$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 8$; 4) $z_{\min} = -20$ при $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 16$; 5) $z_{\min} = -10$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, $x_4 = 30$; 6) $z_{\max} = 164$ при $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 13$, $x_4 = 11$, $x_5 = 4$; 7) $z_{\max} = 173$ при $x_1 = 8$, $x_2 = 7$; 8) $z_{\max} = 173{,}3$ при $x_1 = 5{,}2$, $x_2 = 8{,}3$; 9) $z_{\min} = -137$ при $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 13$, $x_4 = 4$, $x_5 = 14$; 10) $z_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; 11) $z_{\max} = 11{,}25$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0$; 12) $z_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **374.** 1) $z_{\max} = 16$ при $x_1 = 8$, $x_2 = 0$; 2) $z_{\max} = 22{,}5$ при $x_1 = x_2 = 7{,}5$; 3) $z_{\min} = -10$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 10$; 4) $z_{\max} = 10$ при $x_2 \geqslant 0$, $x_3 = \frac{8}{3} + \frac{5}{3}x_2$, $x_1 = \frac{22}{3} + \frac{x_2}{3}$; 5) $z_{\min} \to -\infty$. **380.** 1) $z_{\max} = 1$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 0$,; 2) $z_{\min} = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$,

$x_3=80$, $x_4=34$; 3) $z_{\min}=71{,}3$ при $x_1=6$, $x_2=4{,}25$; 4) $z_{\max}=-1$ при $x_1=2$, $x_2=7$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=43$; 5) $z_{\min}=11$ при $x_1=0$, $x_2=2$; 6) $z_{\max}=-50$ при $x_1=2$, $x_2=1$. **381.** 1) $z_{\min}=0$ при $x_1=0$, $x_2=1$ и $z_{\max}=16$ при $x_1=10$, $x_2=8$; 2) $z_{\min}=0$ при $x_1=x_2=0$ и $z_{\max}=33{,}5$ при $x_1=10$, $x_2=8$; 3) $z_{\min}=5$ при $x_1=15$, $x_2=0$ и $z_{\max}=15$ при $x_1=5$, $x_2=10$; 4) $z_{\min}=0$ при $x_1=2$, $x_2=5$ и $z_{\max}=18$ при $x_1=15$, $x_2=0$; 5) $z_{\min}=0$ при $x_1=x_2=0$ и $z_{\max}=33$ при $x_1=15$, $x_2=0$; 6) $z_{\min}=0$ при $x_1=x_2=0$ и $z_{\max}\to 35$ при $x_1\approx 15$ и $x_2>0$.

Оглавление

Калихман Исаак Липович

Сборник задач по математическому программированию

Редактор А. М. Суходский
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Обложка художника А. И. Демко
Технический редактор Л. А. Муравьева
Корректор Т. А. Гринькова

Сдано в набор 8/IV 1974 г. Подп. к печати 2/IX 1974 г. Формат 84×108$^1/_{32}$.
Бум. тип. № 3. Объем 8,5 печ. л. Усл. п. л. 14,28. Уч.-изд. л. 12,80.
Изд. № ФМ-552. Тираж 50.000 экз. Цена 44 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа»
(для вузов и техникумов) на 1975 г. Позиция № 83.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.
Заказ № 1383.